This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B 464083 DUPL

UNIV. OF MICH.

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING

Engineering
Library
TG
260
.F64

AUSGEWÄHLTE CAPITEL

DER

MATHEMATISCHEN THEORIE

DER

BAUCONSTRUCTIONEN.

VON

A. FOEPPL,

INGENIEUR UND OBERLEHRER AN DER STÄDTISCHEN GEWERBESCHULE
ZU LEIPZIG.

ERSTE ABTHEILUNG.

DIE THEORIE DES FACHWERKS.

LEIPZIG,
VERLAG VON ARTHUR FELIX.
1880.

THEORIE

DES

FACHWERKS.

VON

A. FOEPPL,

INGENIEUR UND OBERLEHRER AN DER STÄDTISCHEN GEWERBESCHULE
ZU LEIPZIG.

MIT VIER TAFELN UND VIELEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,
VERLAG VON ARTHUR FELIX.
1880.

Vorwort.

Zu der Bearbeitung einzelner Capitel der mathematischen Theorie der Bauconstructionen wurde ich durch den Wunsch veranlasst, eigene Untersuchungen, mit denen ich mich seit längerer Zeit beschäftigte, in vollständigerer und mehr zusammenhängender Weise zu veröffentlichen, als es mir bisher möglich war.

Der vorliegende erste Theil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Theorie des Fachwerks, namentlich jener des statisch bestimmten Fachwerks. — Man wird mir nach der Durchsicht des Buches gerne zugeben, dass ich genöthigt war, mit diesem Namen einen Begriff zu verbinden, der von dem sonst vielfach damit bezeichneten sehr verschieden ist. Ich hätte anderen Falles einen neuen Namen für das erfinden müssen, was ich hier unter Fachwerk verstehe.

Der Schwerpunkt meiner Arbeit liegt in dem ersten Capitel. Ich suchte in demselben die Constructionssysteme (theils bekannte, theils neue) aus den allgemeinen Bedingungen der dem Entwerfenden gestellten Aufgabe systematisch herzuleiten, und glaube, gegenüber den wenigen Bemerkungen, mit denen die bisherigen Lehrbücher über diese »allgemeine Theorie des Fachwerks« hinweggingen, eine wesentliche Verbesserung geschaffen zu haben. Hoffentlich gelingt es mir durch diese Veröffentlichung, weitere Kreise der Fachgenossen für die Mitarbeit an der Weiterentwickelung unserer theoretischen Erkenntniss nach dieser Richtung hin zu interessiren.

Zu der hier eingeschlagenen Art der Behandlung des Gegenstandes wurde ich vorzugsweise angeregt durch das bekannte Werk von Prof. Reuleaux: »Die theoretische Kinematik«. Wenn ich auch sonst mein Buch mit dem genannten nicht vergleichen kann, so wird man doch an vielen Stellen dasselbe Streben nach strengen Begriffen und darauf begründeten allgemeinen Folgerungen finden. Ebenso wurde ich (ohne die Absicht, Reuleaux copiren zu wollen) darauf hingeführt, zwischen Fach-

266864

werk und Fachwerkträger in ähnlicher Weise zu unterscheiden, wie es Reuleaux zwischen kinematischer Kette und Mechanismus gethan hat.

Aus dem zweiten Capitel erlaube ich mir, die in § 61 durchgeführte Untersuchung über den gewöhnlichen Charnierbogenträger besonders hervorzuheben. Sonst findet man dort viel Bekanntes. Auf die Einzelheiten der Rechnungen bin ich wenig eingegangen, sondern suchte vielmehr nur einen allgemeinen Ueberblick über die gewöhnlich angewendeten Methoden der Berechnung zu geben.

Auf die Frage, ob man die von mir aufgefundenen neuen Constructionsformen in näherer oder fernerer Zeit mit Vortheil in die Praxis einführen wird, will ich hier nicht näher eingehen. Ich glaube, dass man so lange beim Alten bleiben wird, bis vielleicht einst gewaltigere Aufgaben darauf hindrängen, günstigere Constructionsformen aufzusuchen und auszuführen. Bei der Bearbeitung dieses Buches hatte ich, unbekümmert um die praktische Verwendung der betrachteten Systeme, nur die Vervollkommnung der Theorie im Auge.

Eine eigenthümliche Erfahrung, die ich bei der Empfehlung des mir patentirt gewesenen »Trägers mit schiefer Lagerung« bei verschiedenen Capacitäten der Praxis und Theorie zu machen Gelegenheit hatte, will ich aber hier nicht unerwähnt lassen. Ich fand nämlich im Allgemeinen, dass die Vertreter der Theorie die Schwierigkeiten der praktischen Ausführung als nahezu (oder ganz) unüberwindlich ansahen, während die Praktiker diese kaum erwähnten, dafür aber theilweise theoretische Gründe gegen das System ins Feld führten.

Die Mehrzahl der Fachgenossen wird vielleicht der Ansicht sein, dass theoretische Untersuchungen der Art, wie die hier veröffentlichten, auf die Bauausführungen der nächsten Jahre ohne Einfluss bleiben werden. Wenn dies aber auch zutreffen sollte, so würde es, wie ich glaube, doch ganz verkehrt sein, sich aus diesem Grunde einem Fortschreiten der Theorie nach dieser Richtung hin verschliessen zu wollen. Eine wissenschaftliche Disciplin, die nicht auch um ihrer selbst willen von ihren Jüngern weitergebildet und logisch ausgebaut wird, sinkt ins Handwerksmässige herab.

Inhalts-Verzeichniss.

Erstes Capitel.

Allgemeine Theorie des Fachwerks.

I. Geometrische Theorie desselben.

		Seite
§ 1.	Einleitung	1— 3
§ 2-4.	Definitionen	3— 6
§ 5.	Das Reciprocitätsgesetz in der Fachwerkstheorie	6— 7
§ 6.	Die statisch bestimmten Fachwerke	7—10
§ 7-9.	Zusammensetzung und Zerlegung statisch bestimmter Fachwerke	10—12
§ 10.	Räumliches statisch bestimmtes Fachwerk	12—14
§ 11.	Die Auflager-Elemente des gewöhnlichen Fachwerks	15—16
§ 12.	Unselbständige Fachwerke und complementäre Glieder	17—18
§ 13.	Die Auflagerungen des räumlichen Fachwerks und die Bildung räumlicher Fachwerksträger	18—19

II. Die an den Fachwerken wirkenden Kräfte.

§ 14.	Aeussere und innere Kräfte des Fachwerks	19—21
§ 15.	Die Haupt-Aufgabe der Fachwerkstheorie	21—22
§ 16.	Allgemeine Lösung der Haupt-Aufgabe für das statisch bestimmte Fachwerk	22—23
§ 17.	Allgemeine Lösung der Haupt-Aufgabe für den statisch bestimmten Fachwerkträger	23—24
§ 18-19.	Lösung der Haupt-Aufgabe für den statisch bestimmten Fachwerkträger durch Zerlegung des gegebenen Lasten-Systems in Partial-Systeme	24—26
§ 20.	Allgemeine Lösung der Haupt-Aufgabe für statisch unbestimmte Fachwerkträger	26—28
§ 21.	Allgemeine Methode zur Ermittelung der Temperatur-Spannungen	29—30

III. Systemkunde der Fachwerkstheorie.

§ 22.	Eintheilung der Träger im Allgemeinen	30—32
§ 23.	Die aus starren Systemen gebildeten statisch bestimmten Fachwerkträger	32—34
§ 24.	Träger mit subsidiären Lasten	34—36
§ 25.	Träger aus unselbständigen Fachwerken	36—37
§ 27.	Träger aus statisch bestimmten Fachwerken	37—38
§ 28.	Träger mit einem complementären Gliede	38—40
§ 29.	Die imaginären Gelenke	40—42
§ 30.	Die Gerber'schen Träger	42—43
§ 31.	Schlussbemerkungen	43—44

IV. Die Druckfläche ebener Fachwerksträger.

§ 32.	Allgemeines. Definition der Druckfläche	44—46
§ 33-34.	Die Druckflächen-Regel	46—50

Zweites Capitel.

Specielle Theorie des statisch bestimmten Fachwerks.

I. Berechnung der statisch bestimmten Balkenträger.

Seite

§ 35. Allgemeines . . . . . 51—52
§ 36. Analytische Methode . . . . . 52—53
§ 37. Ritter'sche Methode . . . . . 53—54
§ 38. Erste graphische Methode . . . . . 54—57
§ 39-42. Zweite graphische Methode . . . . . 57—64
§ 43-46. Die Ermittelung der ungünstigten Lastenstellung . . . . . 65—77
§ 47-48. Berechnung einzelner Balkenbrücken-Systeme . . . . . 77—86
§ 49. Fachwerk mit Gegendiagonalen . . . . . 86—89
§ 50. Parabelträger . . . . . 89—90
§ 51 53. Die Schwedler'schen Träger . . . . . 90—95

II. Berechnung der Balkenträger mit subsidiären Lasten.

§ 54. Der Köpke'sche Träger 96
§ 55. Druckfläche des Köpke'schen Trägers . . . . . 97—98

III. Berechnung der Bogenträger auf zwei Stützpunkten.

A. Der gewöhnliche Bogenträger mit drei Gelenken.

§ 56. Bestimmung der Auflagerdrücke . . . . . 98—101
§ 57. Bestimmung der Stabspannungen . . . . . 101—102
§ 58-59. Ungünstigste Stellung des Wagenzuges . . . . . 102 - 107
§ 60. Maximalmomente durch continuirliche Belastung . . . . . 107—109
§ 61. Specielle Untersuchung über die günstigste Gestalt des Trägers . . . 109—113
§ 62. Das Schwedler'sche Princip übertragen auf Charnierbogenträger . . 114

B. Berechnung der Träger mit zwei eigentlichen Kämpfer- und einem imaginären Mittelgelenke.

§ 63-65. Erste Anordnung . . . . . 115—121
§ 66. Zweite Anordnung . . . . . 121—123

C. Bogenträger mit imaginären Kämpfergelenken und einem eigentlichen Mittelgelenke.

§ 67 Bestimmung der Auflagerdrücke . . . . . 123—124
§ 68. Aufstellen der Momenten-Ausdrücke . . . . . 124—127

D. Träger mit schiefer Lagerung.

§ 69. Berechnung derselben . . . . . 127—131

IV. Berechnung der statisch bestimmten Balkenträger mit imaginären Gelenken.

§ 70. Träger über einer Spannweite . . . . . 131—134
§ 71. Gerber'sche Träger mit imaginären Gelenken . . . . . 134—135

Erstes Capitel.

Allgemeine Theorie des Fachwerks.

I. Geometrische Theorie desselben.

Einleitung.

§ 1. Das Streben nach der Vervollkommnung der grösseren Trag-Constructionen hat im Laufe der letzten Decennien die herkömmlichen Constructionsformen allmählich so umgewandelt, dass eine völlig neue Art des Bauens entstand, die sich von der früheren in den wesentlichsten Punkten unterscheidet. Von Jahr zu Jahr und fast bei jeder neuen Ausführung eines grösseren Brückenbaues ist ein Fortschreiten in dieser Richtung zu bemerken gewesen, bis man schliesslich zu dem Principe gelangte, die grossen Tragwände in einzelne Stäbe aufzulösen, die im Allgemeinen dem Zuge der Kräfte folgen, welche sich im gebogenen Balken entwickeln. Man war zu der Erkenntniss gelangt, dass bei den grossen Brückenträgern in ähnlicher Weise wie bei vielen anderen Bau-Constructionen eine möglichst detaillirte Gliederung in einzelne Theile erforderlich sei, damit jedem Theile die seiner Anspruchnahme entsprechende Stärke gegeben werden könne und kein Material in der Construction sitze, das wenig oder gar nicht beansprucht als todte Last nur ungünstig wirke.

Die Vollkommenheit der neueren Trag-Constructionen wurde erreicht durch die Befolgung jenes mächtigen Princips, das auch in allen übrigen menschlichen Wirkungskreisen als wichtigstes Bildungsprincip anerkannt wurde, durch das Princip der Theilung der Arbeit, oder wie hier besser gesagt wird, der Theilung der Verrichtungen. Während man bei den früheren unvollkommenen Trägern einen einzigen Querschnitt verwendete, in dem alle Arten der Anspruchnahme, Zug-, Druck- und Scheerspannungen zugleich vorkamen, von denen auf einige Querschnittstheile mehr, auf andere weniger entfielen, sind in den neueren Constructionen einzelne selbständige Theile zu einem Ganzen vereinigt, von denen jedem eine ganz bestimmte besondere Aufgabe zufällt, die er aber auch

mit Aufwendung aller Macht, mit gleich hoher Anspannung aller seiner Bestandtheile zu erfüllen hat.

Die Hinweisung auf das so viel erprobte Gesetz von dem Vortheile der Theilung der verschiedenen Verrichtungen, zu dem der vorliegende Fall in der That eher ein Paradigma als ein Analagon bildet, ist hinreichend, um von der Berechtigung dieser neueren Construction jeden Laien zu überzeugen. Wir hielten aber nicht für überflüssig, in dieser aller mathematischen Formeln und Denkschwierigkeiten baaren, möglichst drastischen Weise auch Fachleute daran zu erinnern, dass wir in der That auf richtigem Wege sind, nicht nur wenn wir derartige Constructionen schaffen, sondern vor Allem auch, wenn wir sie weiter auszubilden suchen.

Man möge daran denken, dass es keine verlorene Mühe, sondern dass es ernste und vielversprechende Pflicht unserer Generation ist, die vorhandenen Lücken dieser wichtigen Theorien immer mehr zu schliessen, die grossen Gedanken bis in ihre letzten Consequenzen zu verfolgen, die uns bis dahin brachten, und dass es eine Ehrenpflicht ist, unser Wissen darin auf eine Stufe zu bringen, die es ebenbürtig macht mit den anderen Zweigen der exacten Wissenschaften.

Um zur Erreichung dieses Zieles beizutragen, wollen wir uns vor Allem bestreben, unser Thema in möglichst umfassender und strenger Entwicklung zu behandeln. Dazu ist zunächst erforderlich, dass die vorkommenden Begriffe und Anschauungen möglichst genau und scharf präcisirt werden.

Wie bei allen Anwendungen der Theorieen der Mechanik auf die realen Erscheinungen der Praxis wird man auch hier für die theoretische Behandlung ein ideelles System zu definiren haben, das in seinem Verhalten mit dem thatsächlich vorhandenen möglichst viel Uebereinstimmung zeigt. In der That hat man diesen Weg bisher in aller Form befolgt und durch zum Theil recht weitgehende Voraussetzungen bezüglich des Verhaltens der Constructionen die Theorie dieser letzteren auf die Behandlung möglichst einfacher Systeme zurückgeführt. Es ist leicht begreiflich, dass gerade von Seiten der Praktiker und Empiriker diese immerhin nur ungenau zutreffenden Voraussetzungen gerne adoptirt wurden, da man ja in der Wahl des Sicherheits-Coefficienten ein Mittel hatte, selbst gröbere Mängel der Rechnung unschädlich zu machen. Merkwürdig aber ist, dass die von dieser Seite geschaffenen einfachen abstracten Begriffe nach verschiedenen Seiten hin noch keiner allgemeineren Behandlung theilhaftig wurden, deren sie doch in hohem Maasse fähig sind.

Jede correcte Theorie, die sich auf den abstracten Begriff des Fachwerks stützt und dabei zu besonderen Ergebnissen gelangt, hat aber den-

selben Anspruch auf wirklich praktische Bedeutung, wie sie etwa die Berechnung eines gewöhnlichen Parallelträgers besitzt.

Definitionen.

§ 2. Bevor wir zu Definition der verschiedenen Arten des Fachwerks schreiten, heben wir hervor, dass diese Systeme sowohl als räumliche wie als ebene Gebilde aufgefasst werden können. Da die ebenen Fachwerke (das sind solche, deren sämmtliche Glieder wie die an denselben angreifenden Kräfte in einer Ebene liegen) indessen weitaus die grösste praktische Wichtigkeit besitzen, werden wir im Folgenden fast ausschliesslich ebene Systeme im Auge behalten.

Wir verstehen unter einem Fachwerke erster Art oder unter Fachwerk schlechtweg ein System, das aus materiellen Punkten und gewissen Verbindungslinien derselben so zusammengesetzt ist, dass keine relative Bewegung der Theile des Systems gegeneinander möglich ist, ohne dass die Länge dieser Verbindungslinien geändert würde. Für einige Untersuchungen reicht diese Definition vollkommen aus, für die übrigen muss noch eine nähere Angabe bezüglich der eine Form-Aenderung des Systems begleitenden Umstände gemacht werden. Wir setzen zu diesem Zwecke fest, dass die Längen der Verbindungslinien elastisch veränderlich seien (d. h. dass eine Längen-Aenderung derselben zwar möglich, jedoch an die Ueberwindung eines gewissen und zwar elastischen Widerstandes geknüpft sei), während wir annehmen, dass behufs der Aenderung der von je zwei Stäben gebildeten Winkel kein Widerstand elastischer oder sonstiger Art überwunden werden muss.

Die materiellen Punkte und die Verbindungslinien derselben, aus denen das Fachwerk zusammengesetzt wird, nennen wir die Elemente desselben, und zwar im Besonderen die ersteren Knotenpunkte, die letzteren Stäbe. Jeder Stab ist mit jedem seiner Knotenpunkte kinematisch gepaart.

Wir haben (im Gegensatze zu anderen Auffassungen) die Knotenpunkte als eben so wichtige Bestandtheile des Systems hervorgehoben als die Verbindungslinien selbst. Nach unserer Definition erscheinen dieselben sogar als die primären und bemerkenswertheren Elemente des Systems. Die Rechtfertigung für diese Auffassung wird die weitere Behandlung von selbst liefern. Dass man bisher der entgegengesetzten Ansicht war und von einem Systeme von Stäben sprach, deren Verbindungspunkte erst mehr nebensächlich erwähnt wurden, rührt wohl ausschliesslich von dem Umstande her, dass für die constructive Herstellung dieser Elemente das meiste oder nahezu alles Material verwendet werden muss. Indessen muss für die sorgfältige constructive Herstellung der Knotenpunkte immerhin ebenfalls Material aufgewendet werden. Das-

selbe wird durch die Gelenkbolzen der amerikanischen oder durch die »Sammelbleche« der europäischen Knotenpunkts-Constructionen repräsentirt.

Während sich hiernach das Fachwerk erster Art als ein durch Stäbe verbundenes Punktsystem darstellt, schreiten wir zur Definition eines anderen Systems, das wir ein Fachwerk zweiter Art nennen und das im Gegensatze zum ersteren ein durch Punkte verbundenes Stabsystem bildet.

Unter einem Fachwerke zweiter Art verstehen wir ein aus starren Linien und gewissen Verbindungspunkten derselben in der Art zusammengesetztes System, dass eine relative Bewegung der Theile des Systems gegeneinander nicht ausgeführt werden kann ohne eine Aenderung der Winkel, die je zwei mit einander verbundene Stäbe an den Verbindungsstellen miteinander bilden. Wir stellen uns ferner vor, dass diese Winkel kleinen elastischen Grössen-Aenderungen unterworfen werden können und dass bei der dadurch hervorgerufenen Form-Aenderung des Systems sich die einzelnen Knotenpunkte ohne Widerstand längs der durch sie verbundenen Stäbe verschieben können. Zu bemerken ist hierzu noch, dass die Bezeichnungen Stäbe und Knotenpunkte, welche wir hier für die Elemente des Fachwerks zweiter Art wählten, mit den gleichen Bezeichnungen der Elemente des gewöhnlichen Fachwerks nicht verwechselt werden dürfen. Bei den gewöhnlichen Fachwerken (das sind jene der ersten Art) verbindet jeder Stab nur zwei Knotenpunkte, während jeder Knotenpunkt im Allgemeinen mit mehr als zwei anderen Knoten verbunden sein kann. Bei den Fachwerken zweiter Art dagegen verbindet jeder Knotenpunkt nur zwei Stäbe, während jeder Stab im Allgemeinen mit mehr als zwei anderen Stäben verbunden ist.

Um Missverständnisse zu vermeiden, bemerken wir, dass (so viel uns bekannt) Fachwerke der zweiten Art bisher nicht ausgeführt wurden und auch der hier definirte abstracte Begriff derselben früher nicht bekannt war. Es ist selbstverständlich, dass sich correcte Constructionen herstellen lassen, die nach dem oben auseinandergesetzten Principe gegliedert sind; wir glauben aber selbst, dass für die praktischen Verwendungen das Fachwerk zweiter Art wohl kaum jemals mit dem gewöhnlichen Fachwerke in ernstliche Concurrenz treten wird. Immerhin lässt sich ein ganz bestimmtes Urtheil hierüber aus dem Grunde vorläufig nicht abgeben, weil bis jetzt jede eingehendere Untersuchung über diesen Gegenstand fehlt.

Aus den Fachwerken erster und zweiter Art ergibt sich unmittelbar das combinirte Fachwerk. Dasselbe enthält sowohl Knotenpunkte mit mehr als zwei Stäben (mehrgliedrige Knotenpunkte) im Sinne der Definition des gewöhnlichen Fachwerks, als Stäbe mit mehr als zwei Knotenpunkten (mehrgelenkige Stäbe) im Sinne der Definition des Fachwerks zweiter Art.

Ein combinirtes Fachwerk enthält demnach vier verschiedene Arten von Elementen, nämlich:

1) Knotenpunkte erster Art. Die mit denselben verbundenen Stäbe (erster und zweiter Art) können sich bei einer Form-Aenderung ohne Widerstand um dieselben drehen.

2) Knotenpunkte zweiter Art. Dieselben können sich bei einer Form-Aenderung längs der mit ihnen verbundenen Stäbe zweiter Art ohne Widerstand verschieben, während sie einer Aenderung des Winkels der beiden mit ihnen verbundenen Stäbe einen elastischen Widerstand entgegensetzen.

3) Stäbe erster Art, die zwei Knotenpunkte erster Art verbinden und einer Aenderung ihrer Länge einen elastischen Widerstand entgegensetzen.

4) Stäbe zweiter Art, die mit zwei oder mehr Knotenpunkten erster und zweiter Art verbunden sind.

Des geringen praktischen Interesses halber, das die Untersuchungen über Fachwerke dieser Art zu haben scheinen, werden wir uns in der Folge nicht eingehender mit denselben beschäftigen. Was die praktische Verwendung derartiger Constructionen besonders unthunlich erscheinen lässt, ist die Schwierigkeit einer geeigneten Construction der Knotenpunkte zweiter Art. Die Reibung längs der Knotenpunktsbahnen würde bei den Knotenpunkten zweiter Art viel erheblicher ins Gewicht fallen, als bei denen der ersten Art. Ueberdies werden die Stäbe zweiter Art auf Biegung, jene der ersten Art nur auf Zug oder Druck beansprucht. Indessen liesse sich aus diesem letzteren Grunde nicht unmittelbar folgern, dass die Verwendung von Stäben zweiter Art unter allen Umständen nothwendig unvortheilhaft sein müsse.

§ 3. Wir machten bereits in § 1 die Bemerkung, dass die Voraussetzungen, welche man zu Grunde legt, wenn man anstatt der wirklich ausgeführten Construction ein System berechnet, das nach der im vorigen § gegebenen Definition des gewöhnlichen Fachwerks gegliedert ist, theilweise ziemlich gewagt erscheinen. Es ist desshalb das Bedürfniss nach einer genaueren Methode vorhanden, durch die man sich wenigstens ein Urtheil über die Grösse der auf dem ersteren Wege begangenen Fehler zu bilden vermag. Zu diesem Zwecke definiren wir ein System, das sich in seinem Verhalten dem wirklich vorhandenen genauer anschliesst.

Wir nennen dasselbe ein Fachwerk mit steifen Knoten und verstehen darunter ein System, das aus dem gewöhnlichen Fachwerke dadurch hervorgeht, dass die widerstandslose Bewegung der Stäbe um ihre Knotenpunkte während der elastischen Deformation des Systems wegfällt. Das Fachwerk mit steifen Knoten ist demnach ein aus materiellen Punkten und gewissen elastisch veränderlichen Verbindungsstäben derselben derart zusammengesetztes System, dass eine relative Bewegung der

Theile des Systems gegeneinander nur durch eine Form-Aenderung der Stäbe ermöglicht wird. Bei einer solchen Form-Aenderung sollen die Winkel, welche die Stäbe in den Knotenpunkten mit einander bilden, absolut unveränderlich sein.

Es ist bemerkenswerth, dass man aus dem Fachwerke zweiter Art ein ganz ähnliches System dadurch erhält, dass man die widerstandslose Verschieblichkeit der Knotenpunkte längs der mit ihnen verbundenen Stäbe aufhebt. Dasselbe unterscheidet sich von dem Fachwerke mit steifen Knoten dadurch, dass die Winkel, welche die Stäbe in den Knotenpunkten mit einander bilden, elastisch veränderlich sind.

§ 4. Zum Schlusse erwähnen wir noch ein System, das sich von dem Fachwerke erster Art dadurch unterscheidet, dass die einzelnen Stäbe mehr als zwei Knotenpunkte mit einander verbinden, während die Knotenpunkte selbst sämmtlich als Knotenpunkte erster Art construirt sind. Wir nennen dasselbe in der Folge kurzweg Fachwerk mit mehrgelenkigen Stäben.

Das Reciprocitätsgesetz in der Fachwerkstheorie.

§ 5. Der Begriff des Fachwerks ist, wie aus den gegebenen Definitionen zur Genüge hervorgeht, zunächst ein wesentlich geometrischer, und zwar ein solcher, in dem die Maasse der vorkommenden Winkel und Strecken keine Rolle spielen. Wir haben uns bemüht, diesen geometrischen Charakter besonders hervorzuheben, und erreichen dadurch den Vortheil, die mächtigen Hülfsmittel der geometrischen Wissenschaften ohne Umschweife auf derartige Systeme anwenden zu können.

Das geometrische Gesetz der Reciprocität lehrt uns, dass zu jedem geometrischen Gebilde und zu jedem für dasselbe gültigen Lehrsatze ein reciprokes Gebilde und ein reciproker Satz angegeben werden kann, vorausgesetzt, dass dabei keine bestimmten Maasse in Frage kommen. Wir werden daher dieses Gesetz auch in der Fachwerkstheorie wiederfinden müssen.

In der That lässt sich leicht zeigen, dass das Fachwerk erster und jenes zweiter Art reciproke Gebilde sind. Der Knotenpunkt erster Art ist dem Stabe zweiter Art und der Stab erster Art dem Knotenpunkte zweiter Art reciprok. Ueberhaupt lässt sich zu einem gegebenen Fachwerke erster Art stets dadurch ein reciprokes Fachwerk zweiter Art construiren, dass man im reciproken ebenen Systeme jedem Knotenpunkte des ersten Systems die entsprechende Gerade als Stab des zweiten Systems, jedem Winkel, den im betreffenden Knotenpunkte zwei Stäbe mit einander bilden, die entsprechende Strecke auf jener Geraden, und jedem Stabe des ersten Systems den entsprechenden Punkt im reciproken Systeme als Knotenpunkt zuweist.

Der widerstandslosen Drehbarkeit der Stäbe um ihre Knotenpunkte im ersten Systeme entspricht die widerstandslose Verschieblichkeit der Knotenpunkte im zweiten Systeme längs ihrer Stäbe u. s. w.

Interessant erscheint uns hier namentlich der folgende Satz: »Das einem statisch bestimmten Fachwerke erster Art reciproke Fachwerk zweiter Art ist ebenfalls statisch bestimmt«. Der Beweis lässt sich leicht erbringen.

Wir werden im Folgenden noch mehrmals Gelegenheit haben, auf die Reciprocität gewisser Constructionen aufmerksam zu machen. Wenn wir auch keine unmittelbaren Vortheile anzugeben vermögen, die aus dieser Auffassung entspringen, so glauben wir doch, dass die Kenntniss vom Bestehen einer solchen Verwandtschaft zwischen Constructionen, die auf den ersten Blicke durchaus verschieden erscheinen, schon an sich eine Thatsache von Interesse und Wichtigkeit ist.

Es möge hier nebenbei erwähnt werden, dass sich auch zu dem in § 4 erklärten Begriffe des Fachwerks mit mehrgelenkigen Stäben ein reciprokes Gebilde angeben lässt.

Die statisch bestimmten Fachwerke.

§ 6. Als wir in § 2 den Begriff des Fachwerks erster Art feststellten, war von bestimmten Verbindungslinien der Knotenpunkte die Rede, die jedenfalls derart vertheilt sein mussten, dass das Ganze unveränderlich war, wenn die Längen dieser Verbindungslinien constant bleiben sollten. Wir wollen nun untersuchen, wie zur Erreichung dieses Zweckes die Verbindung der Knotenpunkte durch Stäbe erfolgen muss.

Die Art und Weise, nach der das gewöhnliche Fachwerk aus materiellen Punkten und elastischen Verbindungslinien derselben zusammengesetzt wird, hat eine grosse Aehnlichkeit mit der von der atomistischen Theorie angenommenen Constitution der Materie. Nach jener Ansicht besteht die Materie aus einzelnen Molekülen, die, von Attractions- und Repulsionskräften beeinflusst, gewisse Entfernungen von einander einzuhalten suchen. Werden nun durch die Einwirkungen von äusseren Kräften diese Entfernungen geändert, so entspricht jeder Abstandsänderung je zweier Moleküle eine durch dieselbe hervorgerufene Kraft, welche den ursprünglichen Abstand wieder herzustellen sucht. Das Verhältniss ist also im Wesentlichen dasselbe, als wenn die beiden Moleküle durch einen elastischen Stab verbunden wären. Die Richtigkeit dieser Hypothese vorausgesetzt, kann man demnach behaupten, dass bei der Construction von Fachwerken das Verfahren der Natur (wenn auch ohne Absicht) gewissermaassen nachgeahmt worden sei.

Der kürzeren Ausdrucksweise halber wollen wir in den Entwicklungen dieses und der folgenden §§, in denen von den elastischen Form-

Aenderungen des Fachwerks nicht die Rede sein wird, die Stablängen als unveränderlich und daher das Fachwerk selbst als ein starres System ansehen.

Die Knotenpunkte des Fachwerks, deren Anzahl n sei, lassen sich offenbar dadurch zu einem starren Systeme vereinigen, dass man jeden der Knotenpunkte mit allen übrigen durch Stäbe verbindet. Diese grösstmögliche Anzahl der Stäbe beträgt für ebenes wie räumliches Fachwerk $\frac{n(n-1)}{2}$. Wir wollen nun und zwar zunächst unter Voraussetzung eines ebenen Fachwerkes untersuchen, wie viele dieser Stäbe wegfallen können, ohne dass die Starrheit des Systems beeinträchtigt wird. Zu diesem Zwecke legen wir ein rechtwinkliges Coordinaten-System fest, dessen Ursprung mit einem der Knotenpunkte und dessen X-Axe mit einem der von diesem ausgehenden Stäbe zusammenfällt.

Wir denken uns die Knotenpunkte numerirt und nennen den i^{ten} Knotenpunkt K_i, die Coordinaten desselben x_i und y_i. Ist ferner der Knotenpunkt K_k mit K_i durch einen Stab verbunden, so nennen wir den Verbindungsstab S_{ki} und die Länge desselben l_{ki}. Zwischen den Knotenpunkts-Coordinaten und den Stablängen bestehen alsdann die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ccc} (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = l_{12}^2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ (x_k-x_i)^2 + (y_k-y_i)^2 = l_{ki}^2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Die Zahl dieser Gleichungen ist gleich der Zahl der vorhandenen Stäbe, die in der Folge mit m bezeichnet sei. In denselben kommen m Stablängen und $2n$ Knotenpunkts-Coordinaten vor. Von diesen letzteren sind aber 3 unmittelbar gegeben, nämlich die Coordinaten des mit dem Ursprunge zusammenfallenden und die Ordinate jenes Knotenpunktes, durch den die Abscissen-Axe gelegt wurde.

Die Gleichungen (1) sind entweder von einander unabhängig, oder abhängig, oder sie widersprechen sich. Das letztere würde uns zeigen, dass ein derartiges Fachwerk unmöglich ist.

Wir wollen zunächst annehmen, die Gleichungen (1) seien von einander unabhängig. Dann lassen sich aus denselben m der in ihnen vorkommenden Grössen als (im Allgemeinen mehrdeutige) Funktionen der übrigen darstellen. Soll nun das Punktsystem durch die angenommenen Stäbe starr verbunden sein, so müssen sich die Coordinaten sämmtlicher Knotenpunkte als Funktionen der Stablängen l darstellen lassen. Trifft letzteres zu, so ist auch umgekehrt das System starr verbunden. Wenn nämlich auch die Knotenpunkts-Coordinaten mehrdeutige Funktionen der Stablängen sind und sich daher eine gewisse (jedenfalls aber endliche) Anzahl von Configurationen angeben lässt, in denen die Knotenpunkte

so wie verlangt und zwar durch Stäbe von gegebener Länge verbunden sind, so ist doch ein continuirlicher Uebergang aus einer dieser Lagen in eine andere unmöglich, ohne dass sich dabei die Stablängen zeitweilig änderten.

Da von den Knotenpunkts-Coordinaten 3 bereits bekannt sind, müssen zur Berechnung der übrigen aus den Stablängen $2n-3$ Gleichungen gegeben sein. Es geht daraus hervor, dass die mindestens nöthige Anzahl der Stäbe eines Fachwerks

$$m_{\text{min}} = 2n - 3$$

beträgt. Wäre ein Stab und daher eine Gleichung weniger vorhanden, so könnte man eine der Knotenpunkts-Coordinaten willkürlich annehmen und die übrigen als Funktionen dieser und der Stablängen bestimmen. Man erkennt daraus, dass in diesem Falle eine relative Bewegung der Theile des Fachwerks gegeneinander ohne eine Längen-Aenderung der Stäbe möglich wäre.

Die Fachwerke, welche die bei gegebener Knotenpunktszahl mindestens nöthige Anzahl von Stäben enthalten, sind schon an und für sich interessant. Ein ganz hervorragendes Interesse nehmen sie aber deshalb in Anspruch, weil sich ihre Berechnung sehr leicht ausführen lässt und weil sie sich besonders zur praktischen Ausführung eignen. Wir werden uns in der Folge vorzugsweise mit ihnen beschäftigen und bemerken für jetzt, dass man dieselben aus einem später noch näher zu erörternden Grunde statisch bestimmte Fachwerke nennt.

Das aus n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben gebildete System ist übrigens nicht immer ein richtiges Fachwerk. Dies ist vielmehr dann nicht der Fall, wenn die Gleichungen (1) nicht unabhängig von einander sind.

Wenn man die allgemeinen Sätze der Fachwerkstheorie, wie wir es thun, so weit als möglich auf rein geometrischem und analytischem Wege entwickelt, ist es wünschenswerth, eine allgemeine Methode zu kennen, nach der man auf analytischem Wege untersuchen kann, ob ein aus n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben bestehendes System ein richtiges statisch bestimmtes Fachwerk ist. Dazu gibt uns die Theorie der Funktional-Determinante ein Mittel an die Hand.

Nehmen wir etwa an, die letzte der Gleichungen (1) sei eine nothwendige Folge der übrigen, dann könnte man aus den vorhergehenden Gleichungen die Unbekannten x_i, y_i .... in einer derselben und den Stablängen ausdrücken. Setzt man dann diese Ausdrücke in die letzte Gleichung ein, so hebt sich der Voraussetzung zu Folge die noch übrige Unbekannte aus der Gleichung fort und es ergibt sich das Quadrat der letzten Stablänge als eine Funktion der Quadrate der übrigen. Es entsteht also eine Gleichung von der Form

$$l_{mn}^2 = f(l_{12}^2,\ l_{13}^2 \ldots l_{ki}^2 \ldots) . \qquad (2)$$

Diese Gleichung wird zu einer Identität, wenn man aus (1) für die l_{ki}^2 ihre Werthe einsetzt.

Differentiirt man diese Gleichung der Reihe nach partiell nach allen Variablen (das sind die $2n-3$ unbekannten Knotenpunkts-Coordinaten), so erhält man ein System von $2n-3$ Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{array}{ccccccc} -\frac{\partial l_{mn}^2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial l_{12}^2}\frac{\partial l_{12}^2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial l_{13}^2}\frac{\partial l_{13}^2}{\partial x_1} + \ldots\ldots = 0 . \\ \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Zwischen den $2n-4$ partiellen Differential-Quotienten der Funktion f bestehen hiernach $2n-3$ Gleichungen, was nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie nur dann möglich ist, wenn die Determinante des Systems Null ist.

Je nachdem die Determinante

$$\Delta_{2n-3} = \Sigma \pm \frac{\partial l_{12}^2}{\partial x_1}\frac{\partial l_{13}^2}{\partial x_2} \ldots\ldots$$

verschieden von Null oder gleich Null ist, ist hiernach das System ein starres, also ein richtiges Fachwerk, oder es ist dies nicht der Fall.

Die hier besprochene (von Jacobi herrührende) Methode ist zwar recht umständlich, wenn eine grössere Anzahl von Knotenpunkten vorhanden ist; immerhin gestaltet sie sich wenigstens nicht so enorm weitläufig, als es auf den ersten Blick scheinen möchte. Es ist selbstverständlich, dass wir sie nicht für den unmittelbaren praktischen Gebrauch empfehlen wollen, vielleicht bietet sie aber zu manchen späteren Untersuchungen eine ganz bequeme Handhabe. (Vergl. § 19.)

Zusammensetzung und Zerlegung statisch bestimmter Fachwerke.

§ 7. Zwei statisch bestimmte ebene Fachwerke lassen sich zu einem einzigen gleichfalls statisch bestimmten Fachwerke dadurch vereinigen, dass man einzelne der beiderseitigen Knotenpunkte durch Stäbe verbindet. Da für das statisch bestimmte Fachwerk $m = 2n-3$ und durch eine Vereinigung der beiden Systeme zu einem einzigen keine neuen Knotenpunkte hinzukommen, erfordert diese Verbindung 3 neue Stäbe. Es war nämlich vorher $m' = 2n'-3$ und $m'' = 2n''-3$, während nun $2(n'+n'')-3 = m'''$ also $m''' = m' + m'' + 3$ sein muss. Hierbei beziehen sich die Buchstaben m' n' auf das erste, m'' n'' auf das zweite und m''' n''' auf das durch die Vereinigung beider entstehende Fachwerk.

Werden die beiden Fachwerke nur durch zwei Stäbe verbunden, so bleibt stets noch eine relative Beweglichkeit derselben gegen einander bestehen, wie aus dem Vorigen schon unmittelbar hervorgeht. Diese Beweglichkeit ist aber eine völlig bestimmte und lässt sich leicht angeben.

Das System geht dann in das Schema eines Mechanismus, resp. zunächst einer kinematischen Kette über, die Reuleaux*) die viergliedrige cylindrische Kurbelkette genannt hat.

Denkt man sich in diesem Falle das eine der beiden Fachwerke festgehalten, so lässt sich die relative Bewegung des anderen gegen dieses leicht dadurch näher angeben, dass man die beiden Verbindungsstäbe bis zu ihrem Schnittpunkte verlängert. Dieser Schnittpunkt ist der Pol der augenblicklichen Bewegung, und man kann hiernach die Polbahnen dieser relativen Bewegung ohne Schwierigkeit construiren. Wir verweisen bezüglich dieser Construction auf das oben citirte Werk von Reuleaux, S. 72.

Gehen die beiden Verbindungsstäbe, von denen hier die Rede ist, in einem der beiden Fachwerke von demselben Knotenpunkte aus, so vereinfacht sich die relative Beweglichkeit der beiden Systeme wesentlich. Die Polbahnen schrumpfen zu jenem Punkte zusammen und die Bahnen der einzelnen Punkte gehen in Kreise aus diesem Mittelpunkte über.

Es muss hier noch bemerkt werden, dass ein einzelner materieller Punkt mit dem vorhandenen Fachwerke durch nur zwei Stäbe fest verbunden wird. Es hat diese Ausnahme von der sonst gültigen Regel darin ihren Grund, dass auch die Formel $m = 2n - 3$ für einen einzelnen materiellen Punkt, wenn man diesen als einfachsten Specialfall eines Fachwerks ansieht, nicht zutrifft.

Sollen schliesslich a statisch bestimmte Fachwerke zu einem einzigen vereinigt werden, so bedarf es hierzu $3(a-1)$ Stäbe, wovon man sich leicht dadurch überzeugt, dass man für jedes der einzelnen und für das zusammengesetzte System die Formel $m = 2n - 3$ anschreibt.

§ 8. Wie soeben nachgewiesen wurde, sind zur Bildung eines aus zwei anderen zusammenzusetzenden Fachwerks jedenfalls 3 Stäbe erforderlich. Diese Stäbe dürfen aber nicht völlig beliebig angenommen werden. Denkt man sich die beiden Fachwerke vorläufig durch zwei Stäbe verbunden, so muss die dann noch übrig bleibende Beweglichkeit durch die Einführung des dritten Stabes aufgehoben werden. Es müssen also zwei solche Punkte mit einander verbunden werden, deren Abstand sich während Ausführung jener relativen Bewegung ändern würde. Geht aber die Richtungslinie des dritten Stabes durch den Schnittpunkt der Richtungslinien der beiden anderen, so wird, wie man leicht einsieht, zunächst noch eine unendlich kleine relative Beweglichkeit übrig bleiben. Die Länge des dritten Stabes würde nämlich nur eine unendlich kleine Aenderung zweiter Ordnung erfahren müssen, wenn die relative Bewegung der beiden Fachwerke unendlich klein von der ersten Ordnung ist. Schneiden sich nach

*) Reuleaux, Theoretische Kinematik. Braunschweig 1875.

Ausführung einer solchen relativen Bewegung die drei Stabrichtungslinien noch fortwährend in einem Punkte, so ist auch eine endliche relative Beweglichkeit beider Systeme vorhanden.

§ 9. Durch die Umkehrung des im Vorigen beschriebenen Verfahrens der Zusammensetzung zweier statisch bestimmter Fachwerke zu einem neuen gelangt man zur Zerlegung eines Fachwerks in mehrere Theile. Es ist zwar keine nothwendige Eigenschaft eines statisch bestimmten Fachwerks, dass es in zwei Theile zerlegt werden kann, von denen jeder selbst wieder ein statisch bestimmtes Fachwerk bildet, viele Fachwerke und zwar gerade die am meisten in praxi angewendeten, besitzen aber diese Eigenschaft.

Vermag man durch ein gegebenes, statisch bestimmtes Fachwerk einen Schnitt zu legen, der dasselbe in zwei Theile trennt und dabei nur 3 Stäbe trifft, so sind die beiden Theile ebenfalls statisch bestimmt, wie aus § 7 unmittelbar hervorgeht. Trifft ein solcher Schnitt nur 2 Stäbe, so muss der eine der beiden Theile, in die das Fachwerk durch denselben zerlegt wird, ein einzelner materieller Punkt sein, da anderen Falles das gegebene Fachwerk nicht statisch bestimmt wäre (§ 7).

Würde dagegen ein derartiger Schnitt mehr als 3 Stäbe (oder wenn der eine der abgeschnittenen Theile ein einzelner Knotenpunkt ist, mehr als 2 Stäbe) treffen, so müsste nothwendiger Weise wenigstens einer der beiden Theile, in die das Fachwerk dadurch zerfällt, kein starres System mehr sein.

Dagegen ist es unmöglich, dass nach Zerlegung eines gegebenen, statisch bestimmten Fachwerks in mehrere Theile einer dieser Theile ein statisch unbestimmtes Fachwerk bildet. Man überzeugt sich davon leicht, wenn man sich an die Definition des statisch bestimmten Fachwerks erinnert. Wäre nämlich einer der Theile statisch unbestimmt, so müsste es möglich sein, einen Stab desselben fortzunehmen, ohne dass die Starrheit des Systems dadurch beeinträchtigt würde. Dieser Stab müsste auch im ganzen Fachwerke entbehrlich sein, woraus der Satz unmittelbar folgt.

Es geht aus diesen Erörterungen beispielsweise hervor, dass je 4 Knotenpunkte eines statisch bestimmten Fachwerks höchstens durch 5, je 5 Knotenpunkte höchstens durch 7 Stäbe verbunden sein dürfen u. s. w.

Räumliches statisch bestimmtes Fachwerk.

§ 10. Die für das ebene Fachwerk bisher entwickelten Sätze lassen sich mit geringen Modificationen auf das räumliche Fachwerk übertragen.

Zunächst muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Stäbe des räumlichen Fachwerks sich bei der Deformation desselben in jeder Richtung ohne Widerstand um ihre Knotenpunkte müssen drehen können.

Man hat sich also die Knotenpunkte als Universalgelenke construirt zu denken.

Wir legen auf dem räumlichen Fachwerke ein rechtwinkliges Coordinaten-System dadurch fest, dass wir einen Punkt zum Ursprung, einen von diesem ausgehenden Stab zur X-Axe und die durch diesen und einen zweiten ebenfalls vom Ursprung ausgehenden Stab gelegte Ebene zur XY-Ebene wählen.

Man hat dann die den Gl. (1) des § 6 analogen Gleichungen

$$\begin{array}{cccc} (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 = l_{12}^2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ (x_k-x_i)^2 + (y_k-y_i)^2 + (z_k-z_i)^2 = l_{ki}^2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \end{array}$$

Soll das Fachwerk statisch bestimmt sein, so müssen sich die Knotenpunkts-Coordinaten aus den Längen l berechnen lassen. Da von den Knotenpunkts-Coordinaten 6 bereits bekannt sind, ergibt sich die mindestens nöthige Anzahl von Stäben für das räumliche Fachwerk

$$m_{\min} = 3n - 6 .$$

Aus dieser Formel folgt, dass zwei statisch bestimmte, räumliche Fachwerke zu einem einzigen solchen durch 6 Stäbe verbunden werden. Ein einzelner neu hinzutretender Knotenpunkt wird dagegen durch nur drei und ein aus zwei Knotenpunkten und einem sie verbindenden Stabe bestehendes System durch nur 5 Stäbe mit dem vorhandenen Fachwerke zu einem neuen statisch bestimmten Fachwerke verbunden. Als den einfachsten Specialfall des räumlichen Fachwerks hat man demnach ein aus drei Knotenpunkten bestehendes System zu betrachten.

Vermag man durch ein räumliches, statisch bestimmtes Fachwerk einen Schnitt zu legen, der dasselbe in zwei Theile trennt, von denen jeder mindestens 3 Knotenpunkte enthält und der dabei nur 6 Stäbe trifft, so ist jeder der Theile wieder für sich ein statisch bestimmtes System. Weniger als 6 Stäbe darf ein derartiger Schnitt nicht treffen, weil sonst das gegebene System kein starr verbundenes wäre.

Werden zwei räumliche starre Systeme durch fünf Stäbe mit einander verbunden, so bleibt noch eine relative Beweglichkeit übrig, die aber im Allgemeinen eine völlig zwangläufige ist, so dass sich jeder Punkt des einen Systems nur auf einer ganz bestimmten Curve bewegen kann, wenn das andere System festgehalten wird. Man kann diese relative Beweglichkeit dadurch näher untersuchen, dass man in der oben näher bezeichneten Weise mit dem einen der beiden Systeme ein Coordinaten-System verbindet.

Rückt das bewegliche System aus irgend einer gegebenen Lage in eine unendlich nahe Lage, so lässt sich diese Lagen-Aenderung bekanntlich

als eine Schraubenbewegung ansehen. Um die augenblickliche Bewegung vollständig zu beschreiben, genügt es, die Axe dieser Schraubenbewegung, die sogenannte Central-Axe, und die Steigung der Schraubenlinien, resp. das Verhältniss zwischen der Rotations- und der Translationsbewegung, in welche die ganze Bewegung zerfällt, anzugeben. Zur Bestimmung der Lage der Central-Axe im Raume hat man 4 Unbekannte und zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen Translations- und Rotationsgeschwindigkeit (resp. der Steigung der Schraubenlinien) eine, im Ganzen also 5 Unbekannte zu ermitteln. Dazu reichen aber die 5 Gleichungen gerade aus, die aussprechen, dass während der Bewegung die Längen der 5 Verbindungsstäbe constant bleiben sollen. Vorausgesetzt ist dabei jedoch, dass diese 5 Gleichungen von einander unabhängig sind.

Zur Ausführung dieser Rechnung würde man etwa die beiden in der XY-Ebene liegenden Coordinaten des Schnittpunkts der Central-Axe mit dieser Ebene und die drei Winkel, welche diese mit den Axen bildet, sowie die Ganghöhe der Schmiegungsschraubenlinien als Unbekannte einführen. Dabei ist noch zu bemerken, dass zwischen den erwähnten drei Winkeln die bekannte Relation besteht, dass die Cosinus-Quadrat-Summe = 1 ist. Dann nehme man an, das bewegliche System erfahre eine unendlich kleine Rotation $d\varphi$ um die Central-Axe und die entsprechende Translation parallel zu derselben. Es lassen sich alsdann die zugehörigen Coordinaten-Aenderungen eines beliebigen Punktes des beweglichen Systems in den angenommenen Unbekannten ausdrücken. Sei nun L_{ki} einer der Verbindungsstäbe, dessen Knotenpunkt K_i dem beweglichen Systeme angehört, so ergibt sich aus der Gleichung

$$(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 = l_{ki}^2$$

durch Differentiation nach den Coordinaten des beweglichen Knotenpunktes

$$(x_i - x_k)\, dx_i + (y_i - y_k)\, dy_i + (z_i - z_k)\, dz_i = 0 .$$

Setzt man in die so entstehenden 5 Gleichungen die entsprechenden Ausdrücke für dx_i, dy_i u. s. w., die sich aus der oben angedeuteten Entwicklung ergeben, so lassen sich aus denselben ohne Weiteres die angenommenen Unbekannten ermitteln.

Sind die beiden Systeme nur durch 4 Stäbe mit einander verbunden, so müssen die Knotenpunkte des beweglichen Systems im Allgemeinen auf krummen Flächen bleiben, innerhalb deren sie aber beliebig bewegt werden können. Sind nur 3 Verbindungsstäbe vorhanden, die nicht von demselben Punkte ausgehen, so sind die Punkte des beweglichen Systems genöthigt, innerhalb eines begrenzten Raumes zu bleiben, so jedoch, dass im Allgemeinen keine Bewegung des Systems mehr möglich ist, wenn ein beliebiger Punkt in seiner augenblicklichen Lage festgehalten wird u. s. w.

Die Auflager-Elemente des gewöhnlichen Fachwerks.

§ 11. Bisher betrachteten wir das Fachwerk an sich, ohne auf die Befestigung oder Verbindung desselben mit anderen Körpern, mit denen zusammen es eine Construction bilden soll, Rücksicht zu nehmen. Wir werden uns jetzt speciell mit diesen Verbindungen und zwar zunächst der ebenen Fachwerke beschäftigen, die wir dem Sprachgebrauche gemäss Auflagerungen nennen.

Die Auflagerungen des ebenen Fachwerks haben den Zweck, relative Bewegungen desselben gegen die Constructions-Ebene zu verhindern. Da das Fachwerk an sich schon ein starres System bildet, ist hierzu nur die Festhaltung einer beschränkten Zahl von Elementen erforderlich. Die unmittelbar festgehaltenen Elemente des Fachwerks werden Auflager-Elemente genannt.

Zu den Elementen des Fachwerks zählten wir die Knotenpunkte und die Stäbe, und sowohl die einen als die anderen lassen sich zu Auflager-Elementen benützen. Wir werden indessen bemerken, dass thatsächlich nur die Knotenpunkte als eigentliche Auflager-Elemente anzusehen sind. Es entspricht diese Auffassung auch mehr dem Charakter der Knotenpunkte als der primären und wesentlicheren Elemente des Systems.

Ein Knotenpunkt kann entweder vollständig festgehalten, oder es kann seine Beweglichkeit nur beschränkt werden; er kann letzteren Falls genöthigt sein, beständig auf einer gegebenen Linie zu bleiben, längs deren er sich zu bewegen vermöchte, wenn er nicht durch seinen Zusammenhang mit dem Fachwerke selbst daran gehindert wäre. Bei einer elastischen Form-Aenderung soll er sich ohne Widerstand längs dieser Linie, die wir die Auflagerbahn des Knotenpunktes nennen, bewegen können.

Ein Stab kann erstens vollständig festgehalten werden. Dieser Fall ist aber identisch mit dem, dass die beiden Knotenpunkte, die er verbindet, festgehalten sind. Der Stab selbst kommt in diesem Falle gar nicht mehr als Element des Fachwerks in Betracht. Oder er kann zweitens genöthigt sein, stets mit derselben Geraden der Constructions-Ebene zusammenzufallen, längs deren er sich ohne Widerstand zu verschieben vermag. Dieser Fall ist identisch mit dem, dass seine beiden Knotenpunkte genöthigt sind, fortwährend auf dieser Geraden zu bleiben. Drittens kann dem Stabe noch eine Drehung um einen gegebenen Punkt gestattet sein, in welchem Falle seinen beiden Knotenpunkten ebenfalls bestimmte Bahnen vorgeschrieben sind. Wir wollen indessen im letzteren Falle den Drehpunkt ebenfalls als einen Knotenpunkt des Stabes und daher das System selbst nicht mehr als ein reines Fachwerk erster Art betrachten, das also jetzt nicht in Betracht kommt.

Die Construction, welche entsteht, wenn ein starres System festgehalten wird, wollen wir im Hinblick auf die Anwendungen einen Träger nennen. Den Zwang, der einen Punkt des Trägers nöthigt, fortwährend auf einer bestimmten Linie zu bleiben, nennen wir eine Auflager-Bedingung, die diesem Punkte vorgeschrieben ist. Daraus folgt unmittelbar, dass wir von einem Punkte, der völlig festgehalten wird, sagen müssen, es seien ihm zwei Auflagerbedingungen vorgeschrieben. Mehr als zwei Auflagerbedingungen kann kein Punkt unterworfen sein.

Von besonderem Interesse ist hier wieder die Frage nach der mindestens nothwendigen Zahl der Auflagerbedingungen. Dieselbe ist hier sehr leicht zu beantworten. Man sieht unmittelbar ein, dass mindestens drei Auflagerbedingungen vorgeschrieben werden müssen, die im Allgemeinen (nämlich wenn sie unabhängig von einander sind) vollständig hinreichen, das System festzuhalten. Sind nämlich nur zwei Auflagerbedingungen gegeben, so bleibt noch eine, jedoch völlig zwangläufige Beweglichkeit zurück. Beziehen sich beide Auflagerbedingungen auf denselben Punkt des Trägers, so besteht diese einfach in einer Drehung um diesen Punkt. Anderen Falles kann man die der Bewegung des Systemes entsprechenden Polbahnen leicht construiren, da durch die Auflagerbedingungen die Bahnen zweier Punkte gegeben sind. Die dritte Auflagerbedingung muss nun, um jede Bewegung zu verhindern, so gewählt werden, dass die durch sie dem betreffenden Punkte vorgeschriebene Bahn nicht mit der Bahn des Punktes zusammenfällt, die er in Folge der soeben besprochenen Bewegung einschlagen würde. Berühren sich beide Linien in diesem Punkte, so bleibt noch eine unendlich kleine relative Beweglichkeit zurück.

Wir nennen einen Träger, der aus einem starren Systeme besteht, das nur drei Auflagerbedingungen unterworfen ist, einen statisch bestimmten Träger. Wir machen indessen darauf aufmerksam, dass wir diesen Namen auch noch für andere Systeme gebrauchen, die wir in den nächsten §§ behandeln werden.

Man kann die hier besprochenen statisch bestimmten Träger in zwei Classen eintheilen. Die eine derselben umfasst jene Träger, bei denen die drei Auflagerbedingungen drei verschiedenen Punkten vorgeschrieben sind, während bei den Trägern der anderen Classe zwei der Auflagerbedingungen sich auf denselben Punkt beziehen. Bis jetzt sind nur die Träger der letzten Classe praktisch zur Ausführung gekommen; die der ersten Classe waren uns wenigstens bisher überhaupt nicht bekannt. Wir verweisen bezüglich derselben auf § 23.

Unselbständige Fachwerke und complementäre Glieder.

§ 12. Es ist nicht unbedingt nothwendig, dass zur Bildung eines Trägers ein starr unter sich verbundenes System, also z. B. ein derartiges Fachwerk verwendet werde. Man kann vielmehr auch ein fachwerkartiges System, dem aber zur Herstellung einer starren Verbindung noch ein oder mehrere Stäbe fehlen, dadurch zur Herstellung einer völlig starren Träger-Construction benützen, dass man geeignete Auflagerbedingungungen einführt. Die mindestens nöthige Anzahl derselben ist aber dann stets grösser als drei.

Jede Träger-Construction, die durch das dem betreffenden Falle entsprechende Minimum von Auflagerbedingungen zu Stande kommt, nennen wir einen statisch bestimmten Träger, aus Gründen, die ihre Erledigung später finden werden.

Um einen allgemeinen Satz über die in dieser Art gebildeten statisch bestimmten Fachwerkträger abzuleiten, wenden wir eine Entwicklung an, die der in § 6 benützten analog ist. Wir legen ein Coordinaten-System in der Constructions-Ebene (nicht wie in § 6 auf dem Fachwerke selbst) fest und stellen zunächst in Bezug auf dieses die den Gleichungen (1) des § 6 entsprechenden Gleichungen auf:

$$\left.\begin{array}{ccc} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l_{12}^2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 = l_{ki}^2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Zu diesen treten die den Auflagerbedingungen entsprechenden Gleichungen von der Form

$$f(x_a y_a) = 0 \,, \qquad (2)$$

wenn der Knotenpunkt K_a einen der Auflagerknoten bedeutet und die Funktion $f = 0$ die Gleichung der Auflagerbahn dieses Knotens vorstellt. Wird wie früher die Anzahl der Knotenpunkte mit n, die der Stäbe mit m, und schliesslich die Zahl der Auflagerbedingungen mit p bezeichnet, so hat man m Gleichungen (1) und p Gleichungen (2). Das System ist dann völlig unbeweglich, wenn sich aus (1) und (2) sämmtliche Knotenpunkts-Coordinaten als Funktionen der Längen l und der etwa in (2) vorkommenden Constanten bestimmen lassen. Daraus geht hervor, dass

$$p_{\min} = 2n - m \qquad (3)$$

sein muss. Die so gefundene Zahl der Auflagerbedingungen genügt auch vollständig, wenn keine der Gleichungen (1) und (2) von den übrigen abhängt. Würde dagegen etwa eine der Gleichungen (1) von einigen

anderen desselben Gleichungssystems abhängen, so wäre das aus (3) gefundene p_{min} um 1 zu vermehren. Es geht daraus hervor, dass die Gleichung (3) nur für den Fall gültig ist, dass keiner der Theile, in die sich das fachwerkartige System, aus dem der Träger gebildet wird, durch geeignet geführte Schnitte zerlegen lässt, ein statisch unbestimmtes Fachwerk bildet.

Ein fachwerkartiges System, das in der hier besprochenen Weise durch geeignete Auflagerungen zu einer starren Träger-Construction benützt werden kann, für sich selbst aber kein starres System bildet, nennen wir ein unselbständiges Fachwerk. Wenn nicht ausdrücklich eine andere Annahme gemacht wird, setzen wir von demselben voraus, dass keiner der Theile, in die dasselbe durch geeignete Schnitte zerlegt werden kann, ein statisch unbestimmtes Fachwerk bildet.

In diesem Falle wird jedenfalls $m < 2n - 3$ sein. Das unselbständige Fachwerk lässt sich dann leicht dadurch in ein statisch bestimmtes umwandeln, dass man zwischen zweckmässig gewählten Knotenpunkten noch $2n - 3 - m$ Stäbe einschaltet. Wir nennen diese Stäbe complementäre Glieder oder Stäbe. Wir hielten es für zweckmässig, diese Bezeichnung einzuführen, weil sich der Grad der Unselbständigkeit des Fachwerks durch die Angabe der Zahl der complementären Glieder am Einfachsten charakterisiren lässt. Ausserdem lässt sich aber häufig der Ersatz der dem Fachwerk fehlenden complementären Glieder durch ausserhalb desselben liegende Constructionen in augenfälliger Weise nachweisen, und man gelangt dann vermittelst dieses Begriffes zu allgemeineren Auffassungen dieser Constructionen, die nach manchen Seiten hin sich nutzbringend erweisen.

Die Auflagerungen des räumlichen Fachwerks und die Bildung räumlicher Fachwerksträger.

§ 13. Der Vollständigkeit halber müssen wir die in den beiden vorigen §§ für das ebene Fachwerk durchgeführten Erörterungen auch auf das räumliche Fachwerk ausdehnen. Um uns jedoch möglichst von dem Vorwurfe frei zu halten, praktisch unfruchtbaren Speculationen mehr als ein Minimum von Raum gewidmet zu haben, beschränken wir uns hier auf das Nothdürftigste, obschon es die Natur der Sache mit sich bringt, dass grade beim räumlichen Fachwerke die bezüglichen Verhältnisse complicirtere sind, als bei ebenen Systemen. Die räumlichen Fachwerke werden in der Praxis des Ingenieurs vergleichsweise selten (hauptsächlich beim Bau von Kuppeldächern) angewendet, was uns bestimmt, uns diese Beschränkung aufzulegen.

Der Knotenpunkt eines räumlichen Fachwerks kann durch die Construction der Auflagerung genöthigt werden, stets in derselben Fläche zu

bleiben, innerhalb deren er sich aber bei einer elastischen Formänderung des Fachwerks ohne Widerstand zu bewegen vermag. In diesem Falle sagen wir, es sei ihm eine Auflagerbedingung vorgeschrieben. Daraus geht mit Nothwendigkeit hervor, dass wir zwei Auflagerbedingungen zählen müssen, wenn der Knotenpunkt genöthigt ist, stets auf einer gegebenen Linie zu bleiben, während dem Falle, dass er vollständig festgehalten wird, drei Auflager-Bedingungen entsprechen.

Um ein räumliches starres System zu einem Träger zu machen, muss man dasselbe mindestens 6 Auflagerbedingungen unterwerfen, die auch vollständig hinreichen, wenn sie von einander unabhängig sind. Ein solcher Träger ist ein räumlicher, statisch bestimmter.

Ist das System ein unselbständiges räumliches Fachwerk, so kann man es zur Construction eines statisch bestimmten Trägers dadurch benützen, dass man so viel Auflagerbedingungen der Minimalzahl derselben hinzufügt, als das System complementäre Stäbe zählt. Dabei ist aber fortwährend festzuhalten, dass alle Auflagerbedingungen von einander unabhängig sein müssen.

Hält man z. B. 2 Punkte eines statisch bestimmten Fachwerks vollständig fest, so entspricht dies nur 5 von einander unabhängigen Auflagerbedingungen.

Alle diese Sätze lassen sich durch eine Entwicklung, die der für das ebene Fachwerk benützten vollständig nachgebildet ist, ohne Schwierigkeit nachweisen.

II. Die an den Fachwerken wirkenden Kräfte.

Aeussere und innere Kräfte des Fachwerks.

§ 14. Wir setzen jetzt ein gewöhnliches ebenes Fachwerk voraus und nehmen an, dass an den Knotenpunkten desselben beliebige gegebene Kräfte angreifen. An jedem Knotenpunkte denken wir uns die denselben afficirenden gegebenen Kräfte zu ihrer Resultirenden zusammengesetzt und nennen dieselbe die äussere Kraft des betreffenden Knotenpunktes. Denken wir uns die Verbindungsstäbe der Knotenpunkte fort, so würde sich jeder Knotenpunkt seiner äusseren Kraft gemäss bewegen und die relative Lage der Knotenpunkte würde sich sofort verändern, wenn nicht etwa die Beschleunigung aller Knotenpunkte in jedem Augenblicke nach Richtung und Grösse dieselbe wäre. Sieht man von diesem letzteren Falle ab, so fällt den Stäben die Aufgabe zu, die Bewegung der Knotenpunkte so zu modificiren, dass die ursprüngliche Gestalt des

Systems unverändert bleibt. Dies kann nur dadurch geschehen, dass die Stäbe auf die mit ihnen verbundenen Knotenpunkte ebenfalls gewisse Kräfte ausüben, die man im Gegensatze zu den ersteren innere Kräfte nennt.

Wir machen nun die Annahme, dass sich das Fachwerk unter dem Einflusse der auf die einzelnen Knotenpunkte wirkenden äusseren und der durch diese hervorgerufenen inneren Kräfte im Gleichgewichte, und zwar in Ruhe befinde. Dazu gehört, dass jeder Punkt für sich im Gleichgewichte sei, und man kann die bekannten Sätze der Statik ohne Weiteres sowohl für das ganze System, als für jedes Element desselben in Anwendung bringen.

Da sich bei einer elastischen Form-Aenderung die einzelnen Stäbe um ihre Knotenpunkte ohne Widerstand sollen drehen können, darf man auch für den Fall, dass die Knotenpunkte durch Bolzen von einem gewissen Durchmesser in der Construction repräsentirt werden, annehmen, dass die Richtungslinie der von dem Stabe auf den Knotenpunkt übertragenen Kraft durch den Knotenpunkt (resp. durch den betr. Bolzenmittelpunkt) hindurchgeht. Der Voraussetzung zufolge greifen ausser den zwischen Knotenpunkt und Stab übertragenen inneren Kräften, die wir in der Folge auch die Gelenkdrücke des Stabes nennen, keine weiteren Kräfte am Stabe an. Daraus folgt, dass für den Fall des Gleichgewichts die beiden Gelenkdrücke des Stabes einander gleich und entgegengesetzt gerichtet sein müssen. Den Inbegriff beider sich am Stabe im Gleichgewichte haltender Gelenkdrücke nennt man die Spannung des Stabes. Suchen die beiden Gelenkdrücke den Stab zu verlängern, so wird die Spannung eine Zug-, anderen Falles eine Druck-Spannung genannt.

Die Richtungslinien der an jedem Knotenpunkte angreifenden inneren Kräfte sind hiernach in dem hier besprochenen Falle zum Voraus gegeben. Die Ermittlung der Grösse dieser Kräfte bildet die wichtigste Aufgabe der speciellen Fachwerkstheorie. Es gibt einen Fall, in dem sich diese Berechnung besonders einfach gestaltet. Es ist die Berechnung jener Fachwerke, die aus der Minimalzahl von Stäben gebildet sind, und welche wir aus diesem Grunde schon früher statisch bestimmte nannten.

Denkt man sich nämlich in einem solchen Fachwerke irgend einen Stab fortgenommen, so wird im Allgemeinen eine relative Bewegung des Systems eintreten, wenn sich auch vorher die äusseren Kräfte am Fachwerke das Gleichgewicht hielten. Man kann dieses vorher bestehende Gleichgewicht aber jedenfalls dadurch erhalten, dass man an den Knotenpunkten, welche der Stab verband, äussere Kräfte anbringt, die in die Richtung des Stabes fallen und der Grösse und dem Sinne nach den Gelenkdrücken des Stabes gleich sind. Die Grösse dieser den Ge-

lenkdrücken gleichen Kräfte und damit die Spannung des Stabes selbst lässt sich aber dann in einfachster Weise mit Hülfe des Princips der virtuellen Verrückungen auffinden. Lässt man nämlich eine virtuelle relative Bewegung eintreten, so muss nach dem genannten Principe die algebraische Summe der virtuellen Momente (das sind die von den Kräften während der unendlich klein zu denkenden Verschiebung ihrer Angriffspunkte geleisteten Arbeiten) gleich Null sein. In dieser Gleichung kommt aber als einzige Unbekannte die Spannung des Stabes vor, da sich die Verhältnisse der virtuellen Wege der Angriffspunkte ohne Weiteres angeben lassen.

Die Stabspannungen eines derartigen Fachwerks lassen sich demzufolge ohne Zuhülfenahme der Elasticitätsgesetze in elementarster Weise berechnen. Man hat diese Fachwerke aus diesem Grunde statisch bestimmte genannt.

Die letzten Erörterungen lassen sich fast ohne Aenderung des Wortlautes auch auf räumliche statisch bestimmte Fachwerke übertragen.

Es muss noch bemerkt werden, dass auch die Berechnung der Spannung einzelner Stäbe eines statisch unbestimmten Systems auf rein statischem Wege, und zwar in dem Falle erfolgen kann, wenn die Fortlassung des betreffenden Stabes das Fachwerk zu einem nicht mehr starren Systeme macht, wie aus den oben gemachten Bemerkungen ohne Weiteres hervorgeht.

Die Haupt-Aufgabe der Fachwerkstheorie.

§ 15. Unter der Haupt-Aufgabe der Fachwerkstheorie verstehen wir das Problem der Bestimmung der inneren Kräfte eines Fachwerks, wenn die an demselben angreifenden äusseren Kräfte gegeben sind. Wie schon oben bemerkt, setzen wir aber bei der Behandlung derselben voraus, dass sich die äusseren Kräfte am Fachwerke im Gleichgewichte halten, weil eben dieser Fall der einzige von praktischem Interesse ist.

Dagegen hätte es keinen Zweck, wenn man die Behandlung der Haupt-Aufgabe auf den Fall beschränken wollte, dass die äusseren Kräfte nur an den Knotenpunkten wirkten. Es kommen öfters Constructionen vor, in denen auch die Stäbe direct von äusseren Kräften afficirt werden, und wir wollen daher diese Belastungsart von vornherein voraussetzen. Der gewöhnliche Belastungsfall stellt sich dann als ein Specialfall dieses allgemeinen Falles dar und die für den ersten gefundenen Sätze sind ohne Weiteres auch für den letzteren gültig.

Die Haupt-Aufgabe lautet demnach wie folgt:

Auf ein Fachwerk (oder einen Fachwerkträger) wirkt ein System äusserer, sich das Gleichgewicht halten-

der Kräfte. Man soll die durch dasselbe zwischen den Knotenpunkten und Stäben hervorgerufenen Gelenkdrücke bestimmen.

Die Bestimmung der Spannung in jedem einzelnen Punkte des Stabes, wenn die Gelenkdrücke gefunden sind, ist eine Aufgabe der allgemeinen Festigkeitslehre, die wir hier bereits als gelöst voraussetzen.

Den Namen »Haupt-Aufgabe« legten wir dem oben genannten Probleme deshalb bei, weil es in der That eine der wichtigsten Aufgaben der Fachwerkstheorie behandelt. Es gibt Lehrbücher genug, welche diese Haupt-Aufgabe sogar als die einzige Aufgabe der Theorie betrachten. Es bedarf kaum besonderer Erwähnung, dass wir dieser Ansicht nicht huldigen, sondern im Gegentheile ausser der Berechnung gegebener Systeme auch die allgemeineren Fragen nach der Möglichkeit der Bildung neuer Systeme mit gewissen gegebenen Eigenschaften als fundamentale Aufgaben der Theorie ansehen.

Allgemeine Lösung der Haupt-Aufgabe für das statisch bestimmte Fachwerk.

§ 16. Wir denken uns für jedes Element des Fachwerks die an demselben angreifenden äusseren Kräfte zu ihrer Resultirenden zusammengesetzt und stellen die Bedingungs-Gleichungen dafür auf, dass sich an jedem Stabe und an jedem Knotenpunkte die äusseren mit den inneren Kräften Gleichgewicht halten müssen. Für jeden Stab erhalten wir dadurch 3 und für jeden Knotenpunkt 2 von einander unabhängige Gleichungen. Für jeden Knotenpunkt schreiben wir nämlich zwei Componentengleichungen, für jeden Stab ebenfalls zwei Componenten- und eine Momenten-Gleichung an. Die Zahl der vorhandenen Gleichungen beträgt demnach $2n + 3m$, die Zahl der zu bestimmenden Unbekannten dagegen $4m$. Für jeden Stab sind nämlich 2 Gelenkdrücke und für jeden Gelenkdruck 2 Unbekannte (etwa Grösse und Richtung oder die Grösse zweier Componenten) zu bestimmen.

Die vorhandenen $2n + 3m$ Gleichungen sind indessen nicht sämmtlich von einander unabhängig. Sind sie nämlich sämmtlich erfüllt, so muss jedes Element des Fachwerks und daher das ganze Fachwerk im Gleichgewichte sein. Letzteres ist aber nur dann der Fall, wenn sich die gegebenen äusseren Kräfte für sich im Gleichgewichte halten, was die Erfüllung von drei von einander unabhängigen Gleichungen zwischen den äusseren Kräften erfordert, die sich demnach aus den obigen $2n + 3m$ Gleichungen ableiten lassen müssen. Es bleiben demnach zur Bestimmung der Gelenkdrücke noch $2n + 3m - 3$ Gleichungen übrig, die im Allgemeinen von einander unabhängig sind. Die Gelenkdrücke lassen sich hiernach durch diese der Statik starrer Systeme entlehnte Betrachtungsweise ohne Weiteres bestimmen, wenn $2n + 3m - 3 = 4m$ oder

$m = 2n - 3$ ist, wie wir schon früher für den Fall, dass nur die Knotenpunkte belastet sind, fanden.

Es ist von Wichtigkeit, zu bemerken, dass die aufgestellten Gleichungen sämmtlich linear in Bezug auf die Unbekannten sind, wenn man als solche die Componenten der Gelenkdrücke nach zwei Richtungen einführt. Es geht daraus hervor, dass nur eine Lösung möglich ist.

Allgemeine Lösung der Haupt-Aufgabe für den statisch bestimmten Fachwerkträger.

§ 17. Für den Fachwerkträger ist die Lösung der Haupt-Aufgabe von noch grösserer Wichtigkeit als für das einfache Fachwerk, weil sich das Fachwerk fast ausnahmslos zu Trägern verwendet findet.

An den Fachwerkträgern greifen ausser den direct gegebenen äusseren Kräften, die man auch primäre Kräfte zu nennen pflegt, noch die secundären oder Auflager-Kräfte an, die durch den Zwang, welchen die Auflager-Bedingungen auf die Auflager-Knoten ausüben, hervorgerufen werden. Die primären Kräfte unterliegen hier nicht der Bedingung, unter sich im Gleichgewichte stehen zu müssen. Dieselben können vielmehr ganz beliebig gegeben sein, während die secundären Kräfte sich so bestimmen müssen, dass sie mit jenen Gleichgewicht halten, während hier eine Bewegung (abgesehen von den kleinen elastischen Form-Aenderungen) der Natur der Sache nach ausgeschlossen ist.

Ist einem Knotenpunkte eines Fachwerks eine Auflagerbedingung vorgeschrieben, so muss die Richtung der betreffenden Auflager-Reaction mit der Normalen der Auflagerbahn in dem betreffenden Punkte zusammenfallen, weil festgesetzt wurde, dass einer Verschiebung des Auflager-Knotens längs seiner Bahn kein Widerstand entgegenwirken solle. Für die Bestimmung der Auflager-Reaction bleibt demnach hier nur eine Unbekannte zu ermitteln, die sich auf die Grösse derselben bezieht. Es ist hier besonders zu betonen, dass auf den Auflagerknoten ausser der Auflager-Reaction auch noch eine primäre äussere Kraft einwirken kann. Wir werden derartige Systeme später noch näher zu behandeln haben.

Sind dagegen einem Auflagerknoten zwei Auflagerbedingungen vorgeschrieben, so ist über die Richtung der Reaction zunächst nichts Näheres bekannt und man hat daher zu deren Ermittlung zwei Unbekannte zu bestimmen.

Es ergibt sich aus diesen Bemerkungen, dass in dem Systeme der äusseren Kräfte eines Fachwerkträgers so viele Auflager-Unbekannten vorkommen, als dem Träger Auflagerbedingungen vorgeschrieben sind.

Wird zur Bildung eines Fachwerkträgers ein starres System verwendet, so beträgt die mindestens nöthige Zahl der Auflagerbedingungen

nach § 11 drei. Die Auflager-Unbekannten lassen sich demnach in diesem Falle ohne Weiteres nach den Grundsätzen der Mechanik starrer Systeme aus den drei von einander unabhängigen Gleichungen berechnen, welche aussprechen, dass sich sämmtliche äusseren Kräfte im Gleichgewichte halten müssen, woraus sich die Benennung solcher Träger als statisch bestimmte erklärt.

Wird ferner ein unselbständiges Fachwerk zur Bildung eines statisch bestimmten Trägers benützt, so ist nach § 12

$$p = 2n - m .$$

Wir denken uns die Gleichgewichtsbedingungen für jedes Element des Fachwerks angeschrieben und erhalten hierdurch wie in § 16 $2n + 3m$ Gleichungen. In diesen kommen $4m + p$ Unbekannte vor. Setzt man in letzteren Ausdruck den Werth von p für den statisch bestimmten Fachwerkträger ein, so findet man, dass so viel Gleichungen als Unbekannte vorhanden sind. Da die Gleichungen in Bezug auf die Unbekannten linear sind, ist nur ein System von Lösungen möglich; die Stabspannungen wie die Auflagerbedingungen lassen sich demnach eindeutig durch diese Entwicklung bestimmen.

Bezüglich der räumlichen Fachwerkträger begnügen wir uns mit der Bemerkung, dass sich die hier für das ebene Fachwerk durchgeführten Untersuchungen auch auf sie ohne Schwierigkeit übertragen lassen.

Lösung der Haupt-Aufgabe für den statisch bestimmten Fachwerkträger durch Zerlegung des gegebenen Lasten-Systems in Partial-Systeme.

§ 18. Das allgemeine Verfahren der Berechnung statisch bestimmter Fachwerkträger, das wir im vorigen Paragraph skizzirten, ist zwar im Princip sehr einfach, die Ausführung in einem gegebenen Falle aber um so umständlicher. Man hat deshalb Methoden aufzufinden gesucht, durch die man in concreten Fällen rascher zum Ziele gelangen kann und mit denen wir uns in der Folge noch näher beschäftigen werden. Von grösster Wichtigkeit für die Anwendung dieser Methoden ist ein Lehrsatz, zu dessen Beweis wir jetzt schreiten. Der Satz lautet:

> Wirkt auf einen statisch bestimmten Fachwerkträger ein Lasten-System Π_1, das aus den beiden Partial-Systemen Π_2 und Π_3 besteht, so ergeben sich die beiden Gelenkdrücke G_1 und H_1, welche durch Π_1 an einem beliebigen Stabe hervorgerufen werden, dadurch, dass man die Gelenkdrücke G_2 und G_3 resp. H_2 und H_3, die den Partial-Systemen entsprechen, zu ihren Resultirenden zusammensetzt.

Zur Führung des Beweises betrachten wir zunächst die Gleichungen, welche das Gleichgewicht eines beliebigen Stabes des Fachwerks ausdrücken. Wir denken uns zunächst das Lasten-System Π_2 aufgebracht und zerlegen die auf den Stab selbst wirkende Resultirende der äussern Kräfte in zwei Componenten nach den Coordinaten-Axen. Dieselbe Zerlegung nehmen wir auch mit den Gelenkdrücken vor. Mit Bezug auf Fig. 1 gelten alsdann die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

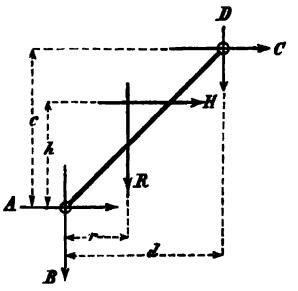


Fig. 1.

$$A_2 + H_2 + C_2 = 0 ,$$
$$B_2 + R_2 + D_2 = 0 ,$$
$$R_2 r_2 + H_2 h_2 + D_2 d + C_2 c = 0 ,$$

aus denen sich B_2 C_2 und D_2 in A_2 und den Lasten ausdrücken lassen. Man findet

$$C_2 = - A_2 - H_2 ,$$
$$D_2 = \frac{-H_2 h_2 - R_2 r_2 + c(A_2 + H_2)}{d} ,$$
$$B_2 = \frac{R_2 (r_2 - d) - c(A_2 + H_2) + H_2 h_2}{d} .$$

Stellt man dieselben Ausdrücke auch für die Lasten-Systeme Π_3 und Π_1 auf, so ergibt sich

$$C_1 = C_2 + C_3 + A_2 + A_3 - A_1 ,$$
$$D_1 = D_2 + D_3 - \frac{c}{d}(A_2 + A_3 - A_1) ,$$
$$B_1 = B_2 + B_3 + \frac{c}{d}(A_2 + A_3 - A_1) ,$$

Nachdem in dieser Weise die 4 Gelenkdruck-Unbekannten jedes Stabes in einer derselben ausgedrückt sind, denke man sich die $2n$ Knotenpunkts-Gleichungen aufgestellt und dieselben nach den noch übrigen Gelenkdruck-Unbekannten und den Auflager-Unbekannten des Fachwerks aufgelöst. Da diese Gleichungen in Bezug auf die Unbekannten, sowie in Bezug auf die Lasten-Componenten und die Momente $R_2 r_2$, $H_2 h_2$ vom ersten Grade sind, ergeben sich dieselben als lineare Funktionen dieser letzteren. Da nun $H_1 = H_2 + H_3$, $R_1 = R_2 + R_3$, $R_1 r_1 = R_2 r_2 + R_3 r_3$ u. s. w., und ähnliche Gleichungen auch für die an den Knotenpunkten angreifenden Lasten-Componenten gelten, so folgt zunächst

$$A_1 = A_2 + A_3 ,$$

woraus auch $C_1 = C_2 + C_3$ u. s. w.

§ 19. Zur Vervollständigung des soeben bewiesenen dient der folgende ebenfalls sehr häufig benützte Lehrsatz:

Ist ein statisch besimmter Fachwerkträger vollständig frei von einer Belastung, so sind sämmtliche Auflagerkräfte und Stabspannungen gleich Null.

Der Satz ist eine unmittelbare Folge des vorhergehenden und kann auch in directer Weise leicht bewiesen werden. Die $2n$ Knotenpunkts-Gleichungen bilden nämlich in diesem Falle ein System linearer homogener Gleichungen zwischen den $2n$ Unbekannten. Daraus folgt, dass diese selbst gleich Null sein müssen, wenn die Gleichungen von einander unabhängig sind. Nur wenn die Determinante der Coëfficienten des Systems gleich Null ist, lassen sich die Unbekannten aus den Knotenpunktsgleichungen nicht bestimmen. Es lässt sich aber diese Determinante leicht auf die in § 6 erwähnte Funktional-Determinante zurückführen. Dividirt man nämlich jedes Element dieser letzteren mit $2l$, so gehen dieselben in die Sinusse und Cosinusse der Richtungs-Winkel des betreffenden Stabes und die Funktional-Determinante in die Determinante des Systems der Knotenpunktsgleichungen über. Da nun zum Begriffe des statisch bestimmten Fachwerks gehört, dass die Funktional-Determinante nicht gleich Null sei (§ 6), so folgt ohne Weiteres der Satz.

Allgemeine Lösung der Haupt-Aufgabe für statisch unbestimmte Fachwerkträger.

§ 20. Ein statisch unbestimmter Fachwerkträger entsteht entweder dadurch, dass man einem statisch unbestimmten Fachwerke 3 oder auch mehr Auflagerbedingungen vorschreibt oder dadurch, dass man einem statisch bestimmten Fachwerke mehr als 3 oder einem unselbständigen Fachwerke mehr als $3+c$ von einander unabhängige Auflagerbedingungen vorschreibt, wenn letzteren Falles c die Anzahl der complementären Glieder des unselbständigen Fachwerks bedeutet.

Alle statisch unbestimmten Fachwerkträger besitzen aber das gemeinsame Merkmal, dass man gewisse Auflagerbedingungen oder gewisse Stäbe fortnehmen kann, ohne die Starrheit und Unbeweglichkeit der Construction zu beeinträchtigen. Wie den Grad der Unselbständigkeit eines Fachwerks durch die Anzahl der complementären Glieder, so kann man den Grad der Unbestimmtheit eines Fachwerkträgers durch die Angabe der überschüssigen Bedingungen charakterisiren, die ihm theils durch die Auflagerungen, theils durch die Stablängen vorgeschrieben sind. Wir nennen dieselben die supplementären Bedingungen des statisch unbestimmten Fachwerks. — Vielfach angewendet findet man namentlich solche statisch unbestimmten Fachwerkträger, denen nur eine supplementäre Bedingung vorgeschrieben ist.

Bei der allgemeinen Behandlung der Haupt-Aufgabe für das statisch unbestimmte Fachwerk machen wir die Annahme, dass äussere Kräfte nur

an den Knotenpunkten angreifen. Man genügt durch diese einfachere Behandlung den thatsächlichen Bedürfnissen der Praxis vollkommen und würde anderen Falles die Durchführung der Rechnung ganz erheblich erschweren, ohne deshalb besonders zuverlässige Resultate zu erhalten.

Zur Lösung der Haupt-Aufgabe sind in diesem Falle $m + p$ Unbekannte zu bestimmen, während $2n < m + p$ ist. Man muss daher zur Gewinnung der noch fehlenden $m + p - 2n$ Gleichungen die Elasticitätstheorie zur Hülfe nehmen. Dies geschieht, indem wir die Voraussetzung machen, dass die Längen-Aenderung Δl, die ein Stab erfährt, wenn zu der bereits vorhandenen Spannung desselben eine Additional-Spannung ΔS hinzutritt, durch die Gleichung

$$\Delta l = k \Delta S$$

bestimmt wird, in der k eine für jeden Stab bekannte individuelle Constante bedeutet, die auch gleich $\frac{l}{EF}$ gesetzt werden kann, wenn F die Querschnittsfläche und E den Elasticitäts-Modul vorstellt. Die Längen-Aenderungen Δl setzen wir als unendlich klein (resp. sehr klein) im Vergleiche zu l voraus, wodurch wir in der That berechtigt sind, k als Constante anzusehen. — Zugspannungen werden positiv, Druckspannungen negativ gerechnet.

Das System möge vorher unter dem Einflusse eines beliebigen Systems äusserer und innerer Kräfte im Gleichgewichte gewesen sein, worauf wir uns ein neues gegebenes System primärer äusserer Kräfte angebracht denken. Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, die durch dieses letztere System hervorgerufenen Stabspannungen zu bestimmen.

In Folge dieser Spannungen wird eine Deformation des Trägers eintreten und die Knotenpunkte werden gewisse Verrückungen erfahren, die im Allgemeinen von derselben Ordnung unendlich klein wie die Längen-Aenderungen der Stäbe sind. Aus der Gleichung

$$l_{ki}^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2$$

ergibt sich hiernach

$$2 l_{ki} d l_{ki} = 2 (x_k - x_i) (dx_k - dx_i) + 2 (y_k - y_i) (dy_k - dy_i)$$

oder

$$S_{ki} = \frac{(x_k - x_i) (dx_k - dx_i) + (y_k - y_i) (dy_k - dy_i)}{k_{ki} l_{ki}} .$$

Es ist ziemlich gleichgültig, ob man hierbei S oder k unendlich klein voraussetzt.

Mit Hülfe dieser Gleichung vermag man alle Stabspannungen in den ebenfalls noch unbekannten Coordinaten-Aenderungen der Knotenpunkte auszudrücken. Wir denken uns diese Ausdrücke in die $2n$ Knotenpunkts-

Gleichungen eingesetzt, welche dann noch $2n + p$ Unbekannte enthalten. Zu denselben treten aber noch die p Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial f}{\partial x_a} dx_a + \frac{\partial f}{\partial y_a} dy_a = 0 ,$$

die man durch Differentiation der Gleichung $f(x_a y_a) = 0$, welche der Auflagerbahn des Auflager-Knotenpunkts a entspricht, erhält. Sämmtliche $2n + p$ Gleichungen sind linear in Bezug auf die Unbekannten, die sich demnach eindeutig aus denselben bestimmen lassen.

Die Unbekannten ergeben sich ferner auch als lineare Funktionen der Lasten-Componenten, woraus der dem in § 18 bewiesenen analoge Satz folgt:

Wirkt auf einen statisch unbestimmten Fachwerkträger ein an den Knotenpunkten angreifendes Lasten-System Π_1, das aus den beiden Partial-Systemen Π_2 und Π_3 besteht, so ist die Spannung S_1, welche in einem beliebigen Stabe durch Π_1 hervorgerufen wird, gleich der algebraischen Summe der durch Π_2 und Π_3 erzeugten Stabspannungen S_2 und S_3.

Dagegen kann der in § 19 für das statisch bestimmte Fachwerk aufgestellte Satz auf das unbestimmte Fachwerk nicht übertragen werden. Es wird vielmehr im Allgemeinen ein gewisses System von Spannungen in den Stäben zurückbleiben, wenn alle primären äusseren Kräfte entfernt werden. Diese Spannungen, welche die Eigenspannungen genannt werden mögen, müssen unter sich und bezüglich mit den Auflagerkräften, die diesem Belastungsfalle entsprechen, im Gleichgewichte stehen. Man vermag die übrigen zu bestimmen, wenn so viele derselben bekannt sind, als das Fachwerk supplementäre Bedingungen enthält. Gewöhnlich nimmt man bei der Berechnung mit Rücksicht auf die Herstellungsart dieser Constructionen an, dass in einem gewissen normalen Zustande das System der Eigenspannungen und der entsprechenden Auflagerkräfte gleich Null sei. Damit ist aber nicht gesagt, dass dasselbe auch stets gleich Null bleibe. Vielmehr bewirken die Temperatur-Aenderungen, welche die einzelnen Stablängen zu verändern suchen, gewisse elastische Deformationen, die wiederum ein besonderes System von Auflagerkräften und Stabspannungen zur Folge haben. Man pflegt diese letzteren Temperaturspannungen zu nennen. Dieselben spielen bei der Berechnung statisch unbestimmter Träger eine sehr wichtige Rolle.

Allgemeine Methode zur Ermittlung der Temperatur-Spannungen.

§ 21. Bei dieser Untersuchung machen wir die allgemein übliche Voraussetzung, dass in jedem Augenblicke die Temperatur aller Stäbe gleich gross sei. Die Temperaturzunahme sei gleich t, die durch dieselbe hervorgerufene Längen-Aenderung eines Stabes, der sich frei ausdehnen kann $= \alpha t l$, behandeln wir als eine unendlich kleine Grösse im Vergleiche zu l. Unter α verstehen wir eine Constante, die für jeden Stab des Fachwerks denselben Werth besitzen soll.

Die Länge des Stabes ki wird eine Aenderung dl_{ki} erfahren, die sich zusammensetzt aus der durch die Temperatur und zweitens der durch die Temperatur-Spannung verursachten Aenderung. Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen können wir setzen

$$dl_{ki} = \alpha t l_{ki} + k S_{ki} .$$

Da nun (wie bei der Entwicklung in § 20) andererseits

$$dl_{ki} = -\frac{(x_k - x_i)(dx_k - dx_i) + (y_k - y_i)(dy_k - dy_i)}{l_{ki}} ,$$

so lassen sich sämmtliche Stabspannungen in lauter bekannten Grössen und den unbekannten Coordinaten-Aenderungen ausdrücken.

Aus den $2n$ Gleichungen, welche das Gleichgewicht der Knotenpunkte ausdrücken, und den p Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_a} dx_a + \frac{\partial f}{\partial y_a} dy_a = 0$$

ergeben sich hierauf die $2n + p$ Unbekannten, welche sich auf die Auflagerkräfte und die Coordinaten-Aenderungen beziehen. Aus diesen letzteren bestimmen sich alsdann die Temperatur-Spannungen selbst mit Hülfe der oben angegebenen Gleichungen.

Auch diese Aufgabe lässt, wie man leicht erkennt, nur eine Lösung zu.

Man sieht leicht ein, dass in einem statisch bestimmten Fachwerkträger durch Temperatur-Aenderungen weder Spannungen noch Auflager-Reactionen hervorgerufen werden können. Die Construction verliert nämlich durch die Formänderungen, welche ein Temperaturwechsel zur Folge hat, keineswegs den Charakter einer statisch bestimmten und kann demnach keine Eigenspannungen besitzen (§ 19).

Anmerkung. Bei den in den letzten Paragraphen durchgeführten Entwicklungen wurden die Auflagerbedingungen stets so behandelt, als wenn je einem Auflagerknotenpunkte nur eine Auflagerbedingung vorgeschrieben wäre. Dies ist in der That

der allgemeinere Fall. Kommen dagegen vollständig festgehaltene Knotenpunkte vor, so schreibe man für jeden derselben die Auflagerbedingungen in der Form

$$x = C, \quad y = C_1,$$

— wenn C und C_1 Constante bedeuten — an. Die allgemeinen Entwicklungen werden dadurch nicht im Geringsten geändert.

III. Systemkunde der Fachwerkstheorie.

Eintheilung der Träger im Allgemeinen.

§ 22. Unter der Systemkunde der Fachwerkstheorie verstehen wir die Lehre von den Constructions-Typen und den besonderen Ausführungsformen, in denen die Fachwerkträger in der Praxis wirklich verwendet werden oder doch verwendet werden können. Sie zerfällt in einen empirischen Theil, der sich mit der Aufzählung und Charakterisirung der vorhandenen und bekannten Constructionen befasst und in einen speculativen, der das Problem behandelt, die überhaupt möglichen Constructionsformen von gewissen verlangten Eigenschaften theoretisch herzuleiten. Eine derartige Trennung werden wir indessen hier nicht einhalten, vielmehr so viel als möglich sowohl die bekannten, als die von uns aufgefundenen neuen Formen aus allgemeinen Gesichtspunkten herleiten.

Die wichtigsten von einem Fachwerkträger zu verlangenden Eigenschaften sind die folgenden:

1) Möglichkeit einer genauen Berechnung desselben. Nur solche Träger wird man, namentlich bei grösseren Ausführungen, anwenden dürfen, deren Spannungen sich wenigstens hinreichend genau bestimmen lassen, um bei bestimmt gewählten Dimensionen die Befürchtung eines Bruches auszuschliessen.
2) Material-Oekonomie. Dieselbe hängt zum Theile von der vorigen Bedingung ab. Je unsicherer sich nämlich die Berechnung gestaltet, desto grössere Dimensionen wird man zur Erlangung eines bestimmten Sicherheitsgrades zur Anwendung bringen müssen.
3) Vermeidung sog. »krummer Arbeit« und überhaupt constructiver Schwierigkeiten.
4) Vermeidung ungünstiger Einwirkungen auf die Pfeiler, Widerlager etc.
5) Vermeidung verschiedener Unzuträglichkeiten, die minder wichtig sind und hier nicht alle besonders aufgeführt werden können.

Dass die Sicherheit der ganzen Construction die erste Bedingung ist, ist so selbstverständlich, dass sie hier gar nicht besonders aufgeführt wurde. Implicit ist dieselbe indessen schon unter (1) enthalten.

Die hier aufgezählten, von einer Träger-Construction zu fordernden Eigenschaften werden nicht von jeder Construction in gleicher Güte zu erfüllen sein. Es ist überhaupt nicht anzunehmen, dass sich etwa eine Universal-Construction angeben liesse, die unter allen Umständen den anderen vorzuziehen wäre. In jedem besonderen Falle der Anwendung wird man vielmehr bald auf diese, bald auf jene Eigenschaften ein grösseres Gewicht legen müssen, und es ist deshalb die gleichzeitige Anwendung verschiedener Constructionen vom constructiven Standpunkte eben so gerechtfertigt als durch andere, namentlich auch ästhetische Rücksichten geboten.

Als die wichtigste aller von einem Träger wünschenswerthen Eigenschaften stellt sich aber die oben unter (1) aufgezählte dar, da sie mit der Zuverlässigkeit der Construction in unmittelbarem Zusammenhange steht. Eine Construction, die auf sie nicht die gebührende Rücksicht nimmt, wird man unter allen Umständen als verwerflich bezeichnen müssen.

Am Besten wird nun die Bedingung (1), wie aus den Untersuchungen in Nr. II. hervorgeht, von den statisch bestimmten Fachwerkträgern erfüllt. Es ist deshalb leicht erklärlich, dass man sich bei der Ausführung grösserer Constructionen bestrebte, womöglich mit statisch bestimmten Systemen auszukommen. Nur dann, wenn man entweder die vielleicht etwas schwieriger herzustellende Construction des statisch bestimmten Fachwerks vermeiden, oder gewisse Vortheile statisch unbestimmter Systeme hinsichtlich der Material-Oekonomie oder der Montirung derselben erreichen wollte, pflegte man von der Verwendung statisch bestimmter Fachwerke abzusehen.

In Nr. II. wurden auch die Principien dargelegt, von denen man bei der Berechnung unbestimmter Fachwerke ausgeht, und es zeigte sich, dass diese Berechnung ebenfalls eine verhältnissmässig noch sehr einfache ist, wenn die Lasten nur an den Knotenpunkten angreifen. Immerhin erfordert aber diese Behandlung Voraussetzungen bezüglich des elastischen Verhaltens der Materialien und der Eigenspannungen des Systems, die sich als recht ergiebige Fehlerquellen darstellen.

Man ist deshalb darauf hingewiesen, wenn irgend möglich, die statisch unbestimmten durch bestimmte Systeme zu ersetzen und man wird suchen müssen, solche statisch bestimmte Systeme ausfindig zu machen, die im Uebrigen dieselben Eigenschaften besitzen, wegen deren man bisher zuweilen unbestimmte Systeme vorzog.

Es ist unseres Erachtens ein correcteres Verfahren, die Constructionen so zu modificiren, dass eine wirklich zuverlässige Berechnung derselben möglich ist, als mehr oder minder gewagte Theorieen aufzubauen, die sich

auf willkürlich angenommene Constructionen beziehen. Es kann allerdings vorkommen, dass eine bestimmte Constructionsform durch irgend welche besonderen praktischen Rücksichten geradezu dictirt wird; man wird aber wohl in allen Fällen Mittel zur Hand haben, den Träger wenigstens so zu gestalten, dass der Bedingung (1) so viel als möglich genügt wird.

Aus den hier dargelegten Gründen sind wir der Ansicht, dass sich die speculative Systemkunde vorläufig vorzugsweise (wenn nicht ausschliesslich) mit statisch bestimmten Systemen zu befassen habe.

Die aus starren Systemen gebildeten statisch bestimmten Träger.

§ 23. Diese Träger haben wir als die einfachsten zuerst zu betrachten. Es ist übrigens bei der Ableitung derselben ziemlich gleichgültig, ob die zur Bildung derselben verwendeten starren Systeme Fachwerke oder sonstige starre Systeme sind.

Wir zeigten bereits in Nr. 1 § 11, dass man zur Bildung eines solchen Trägers dem starren Systeme drei von einander unabhängige Auflagerbedingungen vorzuschreiben habe. Jenachdem diese Bedingungen drei oder nur zwei verschiedenen Knotenpunkten vorgeschrieben sind, lassen sich diese Träger in zwei verschiedene Arten eintheilen. Fig. 2 stellt den letzteren, Fig. 3 den ersteren Trägertypus schematisch dar.

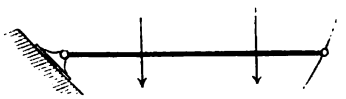


Fig. 2.

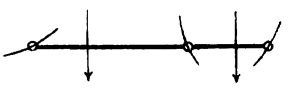


Fig. 3.

Die Auflagerbahnen der Auflager-Knotenpunkte hatten wir früher als beliebig gegebene Curven vorausgesetzt. Andererseits nahmen wir aber bei der analytischen Behandlung der Fachwerke an, dass die Form-Aenderung des Fachwerks und die Knotenpunktswege während einer elastischen oder durch Temperatur-Unterschiede hervorgerufenen Deformation verschwindend kleine Grössen seien, während die Krümmungshalbmesser der Auflagerbahnen auf den in Frage kommenden Strecken derselben entweder endlich oder auch unendlich gross sein sollten. Es geht daraus hervor, dass wir in den Entwicklungen der vorigen Nummern stillschweigend die Voraussetzung gemacht haben, die Auflagerbahnen seien entweder gradlinig, oder liessen sich doch durch tangirende Gerade ersetzen.

Wesentlich anders würde sich dagegen die Sache gestalten, wenn die Krümmungshalbmesser der Auflagerbahnen klein von derselben Ordnung wie die Knotenpunktswege wären. Würde die Auflagerbahn in der

Grenze zu einem Punkte zusammenschrumpfen, so wären dadurch dem Auflagerknoten zwei Bedingungen vorgeschrieben, und dasselbe wäre auch noch der Fall, wenn die Auflagerbahn eine unendlich kleine (resp. sehr kleine) geschlossene Curve bildete.

Man erkennt aus dieser Ueberlegung, dass man die Auflagerbahnen statisch bestimmter Träger als gerade Linien anzunehmen hat, wenn nur eine Bedingung vorgeschrieben werden soll, während man einem Knotenpunkte zwei Bedingungen vorschreibt, wenn man ihn nöthigt auf einer Curve zu bleiben, deren Krümmungshalbmesser von derselben Ordnung klein ist, wie die Knotenpunktswege während einer Deformation.

Zu demselben Schlusse hätten wir übrigens auch auf rein geometrischem Wege gelangen können.

Es möchte scheinen, als ob man zu besonderen Trägersystemen dadurch gelangen könnte, dass man die Auflagerungen auf Auflagerbahnen von sehr kleinem Krümmungshalbmesser zu Hülfe nähme. Diese Systeme würden sich aber nur sehr wenig (oder wenn die Knotenpunkswege unendlich klein sind, nur unendlich wenig) von jenen unterscheiden, die man durch ein vollständiges Festhalten der betreffenden Knotenpunkte erhält.

Bildet die Auflagerbahn des rechten Auflager-Knotenpunktes in Fig. 2 eine Gerade, wie in Fig. 4, so nennen wir den Träger einen Träger mit schiefer Auflagerung. In dieser allgemeinen Gestalt wurde derselbe zuerst veröffentlicht in des Verfassers Broschüre: »Die neuen Träger-Systeme für eiserne Brücken« (Leipzig 1878).

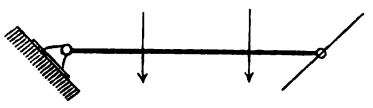


Fig. 4.

Fig. 5.

Geht die Richtungslinie der geraden Auflagerbahn durch den anderen Auflagerknoten, so erhält man den allgemeinen Typus des Balkenträgers, Fig. 5, der demnach ein specieller Fall des vorigen ist.

Damit die drei Auflagerbedingungen des Trägertypus Fig. 3 unabhängig von einander seien, dürfen sich die 3 Normalen der Auflagerbahnen in den jeweiligen Auflagerpunkten nicht in einem Punkte schneiden. Anderen Falles bliebe wenigstens noch eine unendlich kleine relative Beweglichkeit zurück, die sich dadurch äusserte, dass die Auflagerkräfte unendlich gross würden.

Dieser Träger kann übrigens auch über einer Spannweite ausgeführt werden, indem man nämlich zwei Auflagerbahnen auf demselben Pfeiler unterbringt.

Ein specieller Fall hiervon ist der in Fig. 6 dargestellte. Die auf demselben Pfeiler untergebrachten Auflager-Knotenpunkte haben geradlinige Auflagerbahnen, die zusammenfallen. Auch dieser Trägertypus wurde zuerst in der oben genannten Broschüre des Verfassers veröffentlicht.

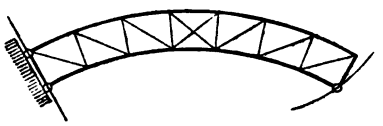


Fig. 6.

Mit Bezug auf diesen Träger muss übrigens noch bemerkt werden, dass die Nöthigung der Auflager-Knotenpunkte auf gewissen Bahnen zu bleiben in praxi ausnahmslos kraftschlüssig erfolgt, während es im Allgemeinen nöthig sein wird, sie bei dem Träger Fig. 3 oder 6 paarschlüssig auszuführen.

Träger mit absichtlich aufgebrachten subsidiären Lasten.

§ 24. In der Costructionslehre kommen häufig Fälle vor, bei denen man eine grössere Stabilität dadurch erzielt, dass man bestimmte günstig wirkende Lasten anbringt, die keinen weiteren Zweck als eben den angegebenen haben. Namentlich bei Stein-Constructionen in Verbindung mit dem Gewölbebau ist dieses Verfahren ein bekanntes und viel angewendetes. Wir nennen derartige Lasten wegen der Unterstützung, die sie der Stabilität der Construction gewähren, subsidiäre.

Im Eisen- und speciell im Fachwerks-Bau ist dagegen die Verwendung subsidiärer Lasten nicht üblich. Nur bei einem grossen Bauwerke, der Elbbrücke bei Riesa, wurde eine subsidiäre Belastung bisher angewendet. Diese seltene Verwendung kann übrigens schon aus dem Grunde nicht auffallen, weil Systeme mit subsidiären Lasten bisher kaum bekannt waren. Herr Köpke (jetzt Finanzrath in Dresden) hat allerdings schon im Jahre 1865 ein solches System in der Hannöverschen Zeitschrift des Arch.- und Ing.-Vereins veröffentlicht. Indessen scheint der betreffende Passus dieser Arbeit schon in ziemliche Vergessenheit gerathen gewesen zu sein, als der Verfasser dieses Buches im Jahre 1875 in der Deutschen Bauzeitung einen Aufsatz veröffentlichte, in dem fast genau dasselbe System empfohlen wurde, das Köpke früher erwähnt hatte.

Man kann subsidiäre Lasten sowohl an den Auflager-, als an den übrigen Knotenpunkten angreifen lassen. Im ersteren Falle darf aber dem Knotenpunkte nur eine Auflagerbedingung vorgeschrieben sein, da bei einem vollständig festgehaltenen Auflagerknoten die subsidiäre Belastung nur einen Einfluss auf die Pfeiler oder Widerlager, nicht auf den Trägerkörper selbst ausüben könnte. Ferner bleibt auch bei den Auflagerknoten mit einer Auflagerbedingung die Componente der subsidiären Last, welche senkrecht zur Auflagerbahn steht, ohne Einfluss auf die Spannungen im Träger. Man wird daher in allen Fällen nur auf solche

subsidiären Auflager-Knotenpunkts-Belastungen Rücksicht zu nehmen haben, die parallel mit der Auflagerbahn wirken.

Wird eine derartige subsidiäre Last am Balkenträger angebracht, so entsteht der Träger mit constantem Horizontalschub Fig. 7, auf den sich die oben erwähnten Veröffentlichungen Köpke's und des Verfassers beziehen und der bei dem Riesaer Elbbrückenbaue zur Anwendung kam.

Es ist selbstverständlich, dass man dieselbe Anordnung auch auf den Träger mit schiefer Auflagerung ausdehnen kann. Man erhält dadurch den Träger Fig. 8.

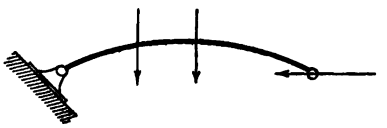


Fig. 7.

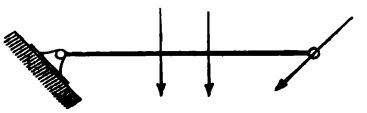


Fig. 8.

Ausserdem können aber auch an den von Auflagerbedingungen freien Knotenpunkten subsidiäre Lasten angebracht werden. In Wirklichkeit würde man aber stets darauf hingewiesen sein, hierzu solche Knotenpunkte zu wählen, die sich in der Nähe der Auflagerungen befinden. In Fig. 9 ist schematisch ein derartiger Träger dargestellt. In des Verfassers Broschüre über »Brücken-Systeme etc.« wurden diese Systeme Träger mit constantem Anfangsmoment genannt.

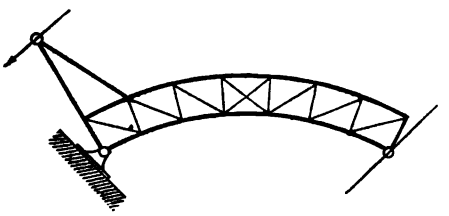


Fig. 9.

Es ist unzweifelhaft, dass man durch geeignete Verwendung subsidiärer Lasten bedeutende Vortheile hinsichtlich der Material-Oeconomie erzielen kann. In Folge dessen hat man auch Aussicht, mit ihrer Hülfe grössere und weitgespanntere Constructionen auszuführen. Nichtsdestoweniger begegnet man einem gewissen Misstrauen gegen diese Constructionen, das wir allerdings nicht ganz ungerechtfertigt nennen können, das aber wenigstens nicht von einer allgemeineren vorurtheilslosen Prüfung und Weiterbildung abhalten sollte.

Jedenfalls ist bemerkenswerth, dass diese Constructionen um so vortheilhafter erscheinen, in je grösseren Dimensionen sie angewendet werden.

Auch alle die in den folgenden §§ näher zu besprechenden Träger-Systeme eignen sich mehr oder weniger zur Anwendung subsidiärer Lasten. Wir wollen indessen, um nicht durch allzugrosse Weitläufig-

keit das Interesse Jener zu schwächen, die die praktische Wahrscheinlichkeit der vorgeführten Constructions-Systeme als wichtigstes Erforderniss betrachten, auf die subsidiären Lasten in der Folge keine Rücksicht nehmen. Wir dürfen uns diese Abkürzung um so mehr erlauben, als es im Bedürfnissfalle nur einer sehr einfachen und leichten Untersuchung zur Beantwortung der Frage bedarf, in welcher Weise subsidiäre Lasten an einem gegebenen Träger angebracht werden können.

Die aus unselbständigen Fachwerken gebildeten statisch bestimmten Träger.

§ 25. Hier sind verschiedene Fälle zu unterscheiden mit Rücksicht auf die Zahl der complementären Glieder des unselbständigen Fachwerks. Wir nehmen in diesem § zunächst an, das unselbständige Fachwerk habe nur ein complementäres Glied.

Zur Bildung eines statisch bestimmten Trägers sind alsdann 4 Auflagerbedingungen erforderlich, die sowohl unter sich, als von den Bedingungen, die durch die Stäbe den einzelnen Knotenpunkten vorgeschrieben sind, unabhängig sein müssen.

Bezüglich der Vertheilung der Auflagerbedingungen lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

1) Man hat 4 Auflagerknoten mit je einer Auflagerbedingung. Von den Auflagernormalen dürfen sich keine drei in demselben Punkte schneiden, wenn sich die betreffenden Auflager-Knotenpunkte sämmtlich auf einem unter sich starren Theile des Systems befinden. Ausserdem dürfen aber in keinem Falle mehr als drei der Auflagerbedingungen Knotenpunkten vorgeschrieben werden, die sich sämmtlich auf einem unter sich starren Theile des Systems befinden. Auch dürfen sich unter keinen Umständen sämmtliche vier Auflagernormalen in demselben Punkte schneiden. Der Träger lässt sich über einer, zwei oder drei Spannweiten zur Ausführung bringen.
2) Man hat 3 Auflager-Knotenpunkte, von denen einer vollständig festgehalten ist. Auch hier dürfen einem für sich starren Theile des Systems höchstens 3 Auflagerbedingungen vorgeschrieben werden. Findet der letztere Fall statt, so darf die Auflagernormale des mit einer Bedingung behafteten Auflagerknotens nicht durch den vollständig festgehaltenen Knotenpunkt hindurchgehen. In keinem Falle aber dürfen beide Auflagernormalen durch den vollständig festgehaltenen Knotenpunkt hindurchgehen.
3) Man hat zwei vollständig festgehaltene Knotenpunkte, die sich nicht auf demselben für sich starren Theile des Systems befinden dürfen.

Von den hier gekennzeichneten 3 Trägertypen eignet sich der erstere wohl deshalb nicht sonderlich zur Ausführung, weil hier, wie bei dem in § 24 besprochenen Träger, mit 3 auf 3 verschiedene Knoten vertheilten

Auflagerbedingungen der Auflagerzwang im Allgemeinen paarschlüssig würde ausgeführt werden müssen. Dagegen sind Träger des zweiten und dritten Typus thatsächlich schon ausgeführt worden.

§ 26. Aus dem Bisherigen geht ohne Weiteres hervor, wie man die verschiedenen Trägertypen ableiten kann, die aus einem unselbständigen Fachwerke mit beliebig vielen complementären Gliedern gebildet werden können. Ist die Zahl der complementären Glieder $= 2$, so lassen sich ebenfalls 3 Trägertypen, ist sie $= 3$ oder 4, so lassen sich 4, ist sie $= 2n$ oder $2n-1$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, so lassen sich $n+2$ Trägertypen angeben.

Man erkennt daraus die fast überreiche Mannigfaltigkeit der ganz allgemein aufgefassten Constructionstypen. Den ganzen Reichthum an wirklichen Träger-Systemen erkennt man aber erst, wenn man auf die besondere Gestaltung der Trägerkörper eingeht, über die bisher keine speciellen Annahmen gemacht waren.

Es würde vollständig unmöglich sein, alle überhaupt ausführbaren Formen zusammenzustellen oder auch nur dem Princip nach anzugeben, da die Anzahl derselben geradezu unendlich ist. In diesem unendlichen Formenreichthume dient uns aber als Rathgeber bei der Auswahl das Gebot der Einfachheit. Wir werden nur solche Formen praktisch verwenden können, die vermöge ihrer Einfachheit sich constructiv leicht verwirklichen lassen, und zugleich werden wir auch durch die Rücksichten auf die Material-Oeconomie auf einfache Formen hingewiesen.

Specielle Eintheilung der Träger-Systeme.

Träger aus statisch bestimmten Fachwerken.

§ 27. Wir werden jetzt mit besonderer Berücksichtigung des Gesichtspunktes, dass so weit als möglich nur einfache Constructionen verwendet werden sollen, die für die Gestaltung des Trägerkörpers maassgebenden Anhaltspunkte aufsuchen.

Zu diesem Zwecke müssen wir uns die Verwendung der Fachwerkträger zur Herstellung weitgespannter Tragconstructionen vergegenwärtigen. Durch diese besondere Bestimmung des Fachwerks ist demselben in einer Richtung eine bedeutende Ausdehnung vorgeschrieben. In der dazu senkrechten Richtung steht es im Allgemeinen dem Constructeur völlig frei, die Maasse so zu wählen, wie es mit Rücksicht auf Material-Ersparniss geboten erscheint. Wir werden aber später, wenn wir diese Ermittlung im Zusammenhange durchführen, noch näher nachweisen, dass diese Rücksichten auf die Innehaltung einer Trägerhöhe hinweisen, die nur einen kleinen Bruchtheil ($\frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{12}$) der Trägerlänge beträgt. Das ganze Fachwerk nimmt in Folge dessen die Gestalt eines schmalen Streifens an, der entweder gerade oder auch gebogen sein kann.

Denken wir uns durch einen solchen Träger einen vertikalen Schnitt gelegt, der denselben in zwei Theile zerlegt, von denen jeder mindestens zwei Knotenpunkte zählt, so müssen durch diesen Schnitt mindestens drei Stäbe getroffen werden, wenn das Fachwerk, welches zur Bildung des Trägers verwendet wurde, ein statisch bestimmtes sein soll, wie sich unmittelbar aus den Untersuchungen in Nr. I ergibt. Wir werden also zu möglichst einfachen Träger-Systemen gelangen, wenn wir die Fachwerke derselben so anordnen, dass die Schnitte, welche zur Längsrichtung derselben senkrecht stehen, immer nur drei Stäbe treffen. Man erhält die Figur eines so gestalteten Fachwerks durch Aneinanderlegen von Dreiecken und nennt derartige Fachwerke aus diesem Grunde auch Dreiecks-Systeme. In der Praxis werden dieselben fast ausschliesslich zur Anwendung gebracht.

Bei diesen Constructionen liegen sämmtliche Knotenpunkte auf einem die ganze Figur begrenzenden Linienzuge. Die Stäbe, welche die Seiten dieses Linienzuges bilden, nennt man die Gurtungsstäbe, die Aufeinanderfolge derselben die Gurtung. Als Theile der letzteren pflegt man nach der besonderen Lage eine obere und untere Gurtung zu unterscheiden. Die innerhalb der Figur laufenden Stäbe werden die Füllungsglieder genannt. Laufen diese Stäbe senkrecht, so pflegt man sie Vertikalen, die übrigen Diagonalen zu nennen.

Man gelangt zu den speciellsten Träger-Systemen, wenn man besondere Annahmen über die Gestalt der Gurtungen und den allgemeinen Verlauf der Füllungsglieder macht. Auf diese engere Specialisirung werden wir aber erst im zweiten Capitel eingehen.

Träger aus unselbständigen Fachwerken mit einem complementären Gliede.

§ 28. Die eingehendere Betrachtung der einfachsten Ausführungsformen des unselbständigen Fachwerks hat hier deshalb eine besondere Wichtigkeit, weil sie uns zugleich auf neue, bisher nicht bekannte Systeme führen wird, was im vorigen § nicht der Fall war.

Wir werden auch hier festhalten, dass wegen der zur Bedingung gemachten Einfachheit niemals mehr als höchstens drei Stäbe durch einen Schnitt getroffen werden sollen, der zur Längsrichtung des Trägers senkrecht steht. Die Gesammtlänge aller Stäbe wird dadurch im Allgemeinen möglichst klein erhalten werden.

Abgesehen von solchen Schnitten, die vom Fachwerke nur einen einzelnen Knotenpunkt abtrennen, muss es dann jedenfalls noch mindestens einen Schnitt geben, der nur zwei Stäbe trifft.

Man gelangt zu einem solchen möglichst einfachen unselbständigen Fachwerke mit einem complementären Gliede, wenn man zwei statisch bestimmte Fachwerke von denselben Eigenschaften wie die im vorigen

§ betrachteten durch nur zwei Stäbe mit einander verbindet. Wir haben das Gebilde, das durch die Vereinigung zweier starrer Systeme vermittelst zweier Stäbe entsteht, bereits in Nr. I, § 7, näher betrachtet. Dort wiesen wir zugleich darauf hin, dass man zwei verschiedene Fälle dieser Construction unterscheiden kann, von denen sich der eine auch als Specialfall des anderen allgemeineren auffassen lässt. Es können nämlich die beiden Verbindungsstäbe so angeordnet sein, dass sie in einem der beiden zu verbindenden Fachwerke von demselben Knotenpunkte ausgehen, oder es kann dieser Fall vermieden sein.

Merkwürdigerweise hat man von diesen beiden gleich einfachen Constructionsweisen bisher nur die erstere und speciellere angewendet und überhaupt gekannt. Es blieb dem Verfasser vorbehalten, in einem Aufsatze über den »Bogen mit sechs Gelenken« im »Civil-Ingenieur« 1879 auf die Möglichkeit der Verbindung durch zwei nicht von einem Knotenpunkte ausgehende Stäbe hinzuweisen.

Als bereits bekannte und ausgeführte Beispiele des ganzen Träger-Geschlechtes der »Träger aus unselbständigen Fachwerken mit einem complementären Gliede« (eine kürzere Bezeichnung steht leider nicht zu Gebote und soll auch hier nicht willkürlich eingeführt werden) skizziren wir hier den wohlbekannten »Bogenträger mit 3 Charnieren«, sowie den »continuirlichen Träger über 2 Oeffnungen mit Mittelgelenk« (System Gerber). (Fig. 10 und 11.)

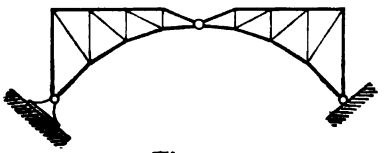


Fig. 10.

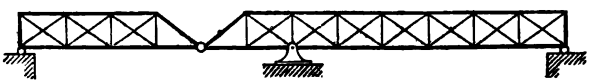


Fig. 11.

Von diesen gehört der erste Träger dem dritten, der zweite dem zweiten der 3 Trägertypen an, die wir in § 25 für das hier in Rede stehende Träger-Geschlecht auffanden. Beide sind so construirt, dass die beiden Fachwerke, aus denen das ganze unselbständige Fachwerk besteht, in einem Punkte (sog. Mittelgelenke) zusammenhängen. Das heisst aber mit anderen Worten, dass das unselbständige Fachwerk durch Verbindung zweier starrer Systeme vermittelst zweier von einem Knotenpunkte ausgehender Stäbe entstand.

Wir wollen nun die Systeme betrachten, die durch die kleine Verallgemeinerung der betrachteten entstehen, indem man nämlich die Verbindungsstäbe der beiden Fachwerke nicht mehr durch einen Punkt gehen lässt. Fig. 12 u. 13 (S. 40) zeigen dieselben. Man sieht ein, dass diese Träger fortwährend noch demselben Geschlechte und denselben Typen angehören wie vorher. Trotzdem wird aber der Träger für die praktische Verwendung ein völlig anderer. Durch die kleine Aenderung, die wir vornehmen, wird eine ganz andere Vertheilung der äusseren Kräfte bei gegebener

Belastung und in Folge dessen auch der Stabspannungen hervorgerufen. Der Träger bedarf daher auch anderer Stabstärken und überhaupt im Allgemeinen einen anderen Materialaufwand als der frühere. Man wird suchen müssen, solche besondere Formen desselben ausfindig zu machen, für die der Gesammt-Materialaufwand zu einem Minimum wird. Im Allgemeinen werden diese aber andere, als die in Fig. 10 und 11 dargestellten Specialformen sein. Es erscheint deshalb im Allgemeinen geboten, an die Stelle der bisher üblichen Träger die möglichst günstigen Specialformen des allgemeineren Systems zu setzen.

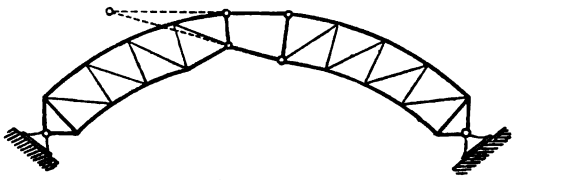


Fig. 12.

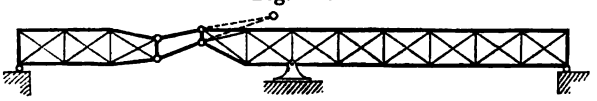


Fig. 13.

Die imaginären Gelenke.

§ 29. Vereinigt man zwei statisch bestimmte Fachwerke F_1 und F_2 zu einem unselbständigen Fachwerke durch zwei Stäbe, die von einem Knotenpunkte A von F_1 ausgehen, so entsteht zunächst ein neues statisch bestimmtes Fachwerk F_3, das aus dem um die beiden Verbindungsstäbe und den Knotenpunkt A vermehrten Fachwerke F_2 besteht. Man kann alsdann das ganze entstandene unselbständige Fachwerk als aus den beiden statisch bestimmten Fachwerken F_1 und F_3, die nur einen gemeinsamen Knotenpunkt A besitzen, bestehend ansehen. Man nennt alsdann A ein Gelenk des ganzen unselbständigen Systems. Eine relative Lagenänderung von F_1 und F_3 kann nur in einer Drehung um den Punkt A bestehen.

Verbindet man dagegen F_1 und F_2 durch zwei Stäbe, die nicht von einem gemeinsamen Knotenpunkte ausgehen, so entsteht ein unselbständiges System von 4 gegeneinander beweglichen Theilen. Die Relativbewegung der beiden Theile F_1 und F_2, auf die es hier vorzugsweise ankommt, lässt sich dann näher bestimmen durch die bereits in § 7 erörterte Construction der Polbahnen. In jedem Augenblicke ergibt sich der Pol als Schnittpunkt der Richtungslinien der beiden Verbindungsstäbe.

Verwendet man aber das unselbständige Fachwerk zur Bildung eines Trägers, so können die beiden Theile F_1 und F_2 nur sehr kleine (von uns in der Regel als unendlich klein betrachtete) Relativbewegungen in Folge elastischer Formänderungen ausführen. Die Lage des Poles ver-

ändert sich daher im Allgemeinen ebenfalls nur sehr wenig und wir dürfen dieselbe annäherungsweise als unveränderlich ansehen. Die Relativbewegungen von F_1 und F_2 finden demnach so statt, als wenn diese beiden Systeme in einem Gelenke zusammenhingen, dessen Ort der Schnittpunkt der beiden Verbindungsstäbe ist. Auch die secundären äusseren Kräfte bestimmen sich genau so, als wenn die Verbindung von F_1 und F_2 in der vorbezeichneten Weise stattfände.

Wir sagen deshalb F_1 und F_2 seien durch ein imaginäres Gelenk verbunden und meinen damit den Schnittpunkt der Richtungslinien der beiden Verbindungsstäbe. Von welcher Bedeutung die Einführung der imaginären Gelenke auf die ganze Systemkunde zu werden vermag, wird aus der folgenden Bemerkung hervorgehen.

Aus jedem gegebenen Träger-Systeme, das aus statisch bestimmten Fachwerken gebildet wird, die durch Gelenke zusammenhängen, lassen sich neue allgemeinere Systeme dadurch ableiten, dass man die eigentlichen Gelenke durch imaginäre in geeigneter Weise ersetzt.

Zur Vervollständigung dieses Ausspruches ist noch das Folgende zu bemerken.

Die völlig festgehaltenen Auflagerknotenpunkte eines Fachwerks bilden bei elastischen Form-Aenderungen Drehpunkte, um die eine Relativbewegung des deformirten Fachwerks gegen die Constructions-Ebene ohne Widerstand erfolgen kann. Man nennt sie deshalb ebenfalls Gelenke, wenigstens bei gewissen Anwendungen. Gerechtfertigt ist diese Bezeichnung übrigens bei allen Anwendungen.

Diese eigentlichen Auflager-Gelenke lassen sich nun ebenfalls durch imaginäre ersetzen. — Gewöhnlich laufen bei den wirklich ausgeführten Constructionen in den Auflager-Knotenpunkten nur zwei Stäbe zusammen. In diesem Falle gelangt man zu einer allgemeineren Constructionsform einfach dadurch, dass man diese beiden Stäbe nicht erst in einen einzigen Knotenpunkt zusammenführt, sondern das freie Ende jedes derselben zu einem vollständig festgehaltenen Knotenpunkte ausbildet. Die Construction wirkt dann gerade so, als wenn der betreffende Theil des Fachwerks im Schnittpunkte der beiden Stabrichtungslinien drehbar gegen die Constructions-Ebene festgehalten wäre. Laufen dagegen in dem Auflager-Knotenpunkte mehr als zwei Stäbe zusammen, so lässt sich ebenfalls eine allgemeinere Construction und zwar dadurch bilden, dass man einen der Stäbe aus dem Knotenpunkte loslöst und das so frei gewordene Ende als selbständigen festgehaltenen Auflager-Knoten ausbildet.

Zur Führung des Beweises dieser Behauptungen genügt die Bemerkung, dass durch diese Anordnung ein Auflager-Knotenpunkt und daher zwei Auflager-Unbekannte mehr geschaffen werden, während andererseits durch das Hinzukommen des neuen Knotenpunktes auch zwei neue

Gleichungen aufgestellt werden können. Die Construction bleibt also statisch bestimmt, wenn sie es vorher war.

In einer Beziehung verhält es sich aber mit dem Ersatze von eigentlichen Auflagergelenken durch imaginäre wesentlich anders als beim Ersatze von eigentlichen Mittelgelenken durch imaginäre. In diesem letzteren Falle bilden nämlich die neu gefundenen Träger nur allgemeinere Systeme, die aber sonst demselben Geschlechte und demselben Typus wie die ursprünglichen angehören. Im ersteren Falle gehören dagegen die gefundenen Träger einem ganz anderen Geschlechte an. Die Zahl der complementären Glieder der Fachwerke hat sich bei denselben vermehrt.

Als Beispiel skizziren wir hier*) eine Constructionsform, die aus dem gewöhnlichen Bogenträger mit 3 Gelenken hervorgeht, wenn man die Auflagergelenke durch imaginäre ersetzt. Man hat bei diesem Ersatze darauf zu sehen, dass die drei neuen Gelenke (die beiden imaginären und das eigentliche) nicht in gerader Linie liegen.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass die einzelnen Stäbe, durch die das imaginäre Gelenk gebildet wird, selbst wieder als Fachwerke und vielleicht sogar der räumlichen Ausdehnung nach als Haupt-Constructionstheile ausgebildet werden können.

Wir weisen bei dieser Gelegenheit noch besonders darauf hin, dass man durch ein solches Verfahren des Ersatzes eines Stabes durch ein statisch bestimmtes Fachwerk zur Bildung neuer Systeme gelangt, die sich im Wesentlichen von den gegebenen nicht oder nur wenig unterscheiden, wenn sie auch äusserlich eine ganz andere Gestalt annehmen können. Jedenfalls sind aber die so gewonnenen neuen Systeme keine solchen mehr, die dem Gebote möglichster Einfachheit der Constructionslinien entsprechen.

Die Gerber'schen Träger.

§ 30. Von Trägern, die aus unselbständigen Fachwerken mit mehr als einem complementären Gliede gebildet sind, waren bisher nur die nach ihrem Erfinder benannten Gerber'schen Träger bekannt. Wir werden uns hier damit begnügen, das Princip derselben zu erklären und die Verallgemeinerung, die man durch die Einführung imaginärer Gelenke erhält, auseinander zu setzen.

Stellt man sich die Aufgabe, einen möglichst einfach gestalteten statisch bestimmten Träger über mehrere Oeffnungen a priori aufzusuchen, so wird man in der That ohne Weiteres auf die Gerber'schen Träger hingeführt. Man wird nämlich von einem solchen Träger verlangen, dass Schnitte, die senkrecht auf der Längenrichtung stehen, nicht mehr als

*) Diese Figur befindet sich auf Tafel I. Dort sind auch die bisher betrachteten Formen übersichtlich zusammengestellt.

höchstens drei Stäbe treffen. In Folge dessen erscheint der Träger aus mehreren Fachwerken zusammengesetzt, die der Länge nach, durch je zwei Stäbe verbunden, aneinander gereiht sind. Diese beiden Stäbe repräsentiren aber jedesmal entweder ein eigentliches oder ein imaginäres Gelenk. Den bequemsten (und allein üblichen) Trägertypus erhält man, wenn man einen Auflagerknoten völlig fest hält und den übrigen nur je eine Bedingung vorschreibt. Man hat bisher die Auflagerbahnen dieser letzteren Knotenpunkte stets nur als horizontale gerade Linien angenommen.

Da das unselbständige Fachwerk hier so viel complementäre Glieder zählt, als eigentliche oder imaginäre Gelenke vorkommen, ist die Zahl dieser letzteren um zwei geringer zu nehmen, als die Zahl der Auflagerknoten. In jeder einzelnen Spannweite dürfen aber höchstens zwei Gelenke untergebracht sein. Diese letztere Beschränkung fällt übrigens fort, wenn die Auflagerungen in anderer Weise angeordnet sind, als hier angenommen wurde. Die Maximalzahl der Gelenke in einer Spannweite ist dann im Allgemeinen gleich drei; dieselben dürfen aber nicht in gerader Linie liegen.

Fig. 14 und 15 zeigen Gerber'sche Träger über drei Oeffnungen mit eigentlichen und mit imaginären Gelenken.

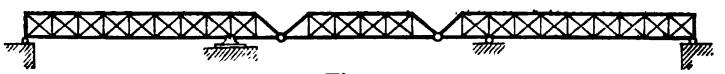


Fig. 14.

Fig. 15.

Schlussbemerkungen.

§ 31. Am Schlusse dieser Nummer mögen noch einige Bemerkungen Platz finden, die für die Auffassung des Vorausgegangenen nicht ohne Interesse sind.

Zunächst sei bezüglich der imaginären Gelenke bemerkt, dass die beiden Stäbe, durch die ein solches constructiv repräsentirt wird, parallel laufen können. Wir sprechen alsdann von einem unendlich fernen imaginären Gelenke. Ein solches ist aber äquivalent einem Walzenlager, dessen Bahn auf der Richtungslinie der Verbindungsstäbe senkrecht steht. Anstatt also beispielsweise ein Fachwerk auf einem Pfeiler durch ein imaginäres unendlich fernes Gelenk aufzulagern, kann man ein Walzenlager anordnen, an dem aber mindestens zwei Knotenpunkte befestigt sein müssen.

Interessant sind auch gewisse Ableitungen einzelner Träger-Systeme aus anderen gegebenen, dadurch, dass man bestimmte Glieder verküm-

mern und in der Grenze verschwinden lässt. Lässt man nämlich beispielsweise den einen Trägertheil eines Bogenträgers mit drei eigentlichen Gelenken allmählich kleiner (und den anderen entsprechend grösser) werden, so erhält man in der Grenze einen Träger, der an der einen Auflagerung zwei unendlich nahe Gelenke enthält. Durch diese Anordnung wird der betreffende Auflagerdruck genöthigt, fortwährend eine bestimmte Richtung beizubehalten und durch einen gegebenen Punkt zu gehen. Dasselbe Resultat kann man aber auch dadurch erzielen, dass man ein Walzenlager anordnet, längs dessen Bahn sich der Auflager-Knotenpunkt bewegen muss. Man erhält dadurch den Träger mit schiefer Auflagerung und aus diesem durch Specialisirung auch den gewöhnlichen Balkenträger gewissermaassen als Specialfälle des Bogens mit 3 Gelenken.

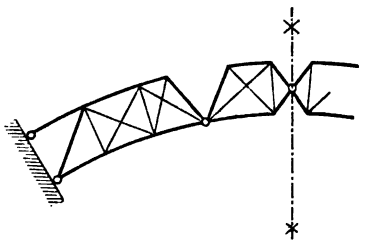


Fig. 16.

Schliesslich soll hier noch in Fig. 16 ein statisch bestimmter »eingespannter Bogenfachwerksträger« angegeben werden. Wir bemerken dazu, dass ein solcher Träger als ein Träger auf vier Stützpunkten anzusehen ist. Da ihm 8 Auflagerbedingungen vorgeschrieben sind, muss das zur Bildung desselben zu verwendende Fachwerk 5 complementäre Glieder besitzen.

IV. Die Druckfläche ebener Fachwerksträger.

Allgemeines. Definition der Druckfläche.

§ 32. Wir wollen annehmen, es wäre die Aufgabe gestellt, einen Fachwerkträger zu entwerfen und man hätte bereits einen bestimmten Trägertypus zur Ausführung gewählt. Die Lage sämmtlicher Auflager-Knotenpunkte, die Richtung der Auflagerbahnen, sowie die Lage der etwaigen Mittelgelenke sei gegeben; man soll die theoretisch beste Gestalt des Fachwerkes ermitteln, das diese einzelnen gegebenen Punkte mit einander verbindet.

Diese Aufgabe ist nicht so unbestimmt, als es auf den ersten Blick scheinen möchte; ihre allgemeine Behandlung ist freilich schwierig genug und wir sind auch nicht im Stande, eine strenge Lösung anzugeben. Immerhin wissen wir eine Methode zur annähernden Lösung anzugeben, die vielleicht auch noch einmal zu genaueren Lösungen führt.

Zur Berechnung, wie zur genaueren Bestimmung der Constructionslinien des Trägers müssen vor Allem die Lasten hinsichtlich ihrer Grösse

und eventuell auch hinsichtlich ihrer Gruppirung bekannt sein, die später von dem Träger getragen werden sollen. Wir setzen bei unseren Lesern als bekannt voraus, dass diese Lasten in permanente und mobile unterschieden werden, die nach empirischen Formeln, resp. nach bestimmten vorgeschriebenen Normen angenommen werden. Als mobile Last nimmt man entweder eine continuirliche gleichmässig vertheilte Belastung oder einen Eisenbahnzug von bestimmter Zusammensetzung an. Die erstere Annahme erleichtert die analytische Behandlung, während die letztere mehr der Wirklichkeit entspricht. Auf graphostatischem Wege bietet die Behandlung im letzteren Falle keine grösseren Schwierigkeiten, als der erste Belastungsfall. So treffliche Dienste die graphische Methode bei der Berechnung der Brückenträger aber auch zu leisten vermag, so ist doch bei Untersuchungen allgemeinerer Natur die analytische Methode bedeutend gegen sie im Vortheile. Die graphische Methode eignet sich mehr für Berechnung vorgelegter specieller Fälle. Man vermag mit ihrer Hülfe allerdings auch allgemeinere Schlüsse zu ziehen, dieselben sind aber nicht so durchsichtig und elegant, wie sie sich bei Anwendung der Analysis gestalten. Aus diesen Gründen werden wir in der Folge häufig eine continuirliche mobile Belastung bei unseren Untersuchungen voraussetzen, obschon wir das Verlangen in jeder Beziehung unterstützen, dass namentlich für die Dimensionen-Berechnung der Eisenbahnbrücken stets ein Eisenbahnzug als grösste mobile Last zu Grunde gelegt werde.

Die primären Kräfte, welche auf den Träger wirken, sind hiernach jedenfalls sämmtlich senkrecht gerichtet. Nur bei Dachbindern wird man unter Umständen die horizontalen Componenten des Winddruckes zu berücksichtigen haben. Wir werden aber jetzt auf solche Constructionen vorläufig keine Rücksicht nehmen.

Die secundären Kräfte des Trägers müssen dagegen nicht senkrecht gerichtet sein. Es trifft dies vielmehr nur bei den sog. Balkenträgern zu. Wir wollen aber diese specielle (wenn auch vielverbreitete) Trägerart hier von der Betrachtung ausschliessen und nur solche Trägersysteme berücksichtigen, bei denen horizontale Auflagerkräfte auftreten.

Denkt man sich durch einen solchen Träger einen vertikalen Schnitt gelegt, der denselben in zwei Theile trennt, so wird die Resultirende der an einem Theile wirkenden äusseren Kräfte irgend eine schräg gerichtete Kraft sein, die sich nach Lage und Grösse leicht bestimmen lässt, wenn der Träger statisch bestimmt ist und die primären Kräfte gegeben sind. Man nennt diese Resultirende den Mitteldruck für den betreffenden Schnitt, und die Gesammtheit der Richtungslinien der Mitteldrücke für alle möglichen vertikalen Schnitte den Druckbüschel. Die von dem Druckbüschel eingehüllte Linie wird die Drucklinie genannt. Dieselbe ist entweder geradlinig gebrochen oder krummlinig, jenachdem

der Träger nur durch isolirte Lasten (z. B. nur durch Knotenpunktslasten) oder durch continuirliche Lasten afficirt wird.

Jedem gegebenen Systeme primärer äusserer Kräfte entspricht eine besondere; aber auch nur diese eine Drucklinie. Da der Träger unter dem Einflusse der mannigfaltigst gestalteten Lasten-Systeme während seiner Anwendung stehen kann, wird auch die Drucklinie zu verschiedenen Zeiten eine verschiedene Gestalt und Lage besitzen. So verschiedenartig die Zusammensetzung des auf den Träger wirkenden Systems primärer Kräfte aber auch sein kann, so liegt sie doch innerhalb gewisser entweder willkürlich festgesetzter oder vorgeschriebener, jedenfalls aber für den Constructeur gegebener Grenzen. Daraus folgt, dass auch die Drucklinie zwar ihre Lage und Gestalt verändern kann, dass diese Veränderlichkeit aber nur innerhalb gewisser Grenzen möglich ist.

Das Flächenstück der Constructionsebene, innerhalb dessen jede Drucklinie, die einem als möglich vorausgesetzten Belastungsfalle entspricht, liegen muss, nennen wir die Druckfläche, die dasselbe begrenzenden Linien die Druckflächengrenzen.

Die Gestalt der Druckfläche ist abhängig von den Anordnungen der Auflagerungen und der etwa vorkommenden Mittelgelenke des Trägers, sowie von den Voraussetzungen, die man über die zu erwartende Belastung macht. Unabhängig ist sie dagegen von der besonderen Gestaltung des Trägerfachwerkes. Man kann also die Druckfläche construiren, noch bevor man sich über die specielle Ausführungsform schlüssig gemacht hat. Wir werden im nächsten Paragraph zeigen, wie man in gewissen Fällen mit Hülfe der Druckfläche die günstigste Trägergestalt näherungsweise ermitteln kann.

Würden sich die Richtungslinien aller auf einen Träger wirkenden primären wie secundären äusseren Kräfte in einem Punkte schneiden, so wäre die Drucklinie nicht wie bisher zu construiren. Sie wäre selbst zu jenem Punkte zusammengeschrumpft. Der Druckbüschel ist in einen Strahlenbüschel erster Ordnung übergegangen. Ein Specialfall dieses Belastungsfalles ist der beim Balkenträger stattfindende. Die Richtungslinien sämmtlicher Kräfte gehen durch denselben unendlich fernen Punkt. Die Druckfläche des Trägers hat sich ebenfalls auf diesen unendlich fernen Punkt zusammengezogen.

Die Druckflächen-Regel.

§ 33. Der allerdings nur näherungsweise zutreffende Satz, welcher den Zusammenhang zwischen der Gestalt der Druckfläche und der günstigsten Trägergestalt ausspricht, lautet wie folgt:

Im Allgemeinen erhält man günstige Trägerformen, wenn man den Verlauf der Gurtungen des Trägers den

Druckflächengrenzen anpasst. Will man nach Lage der übrigen Verhältnisse diese Regel nicht für beide Gurtungen befolgen, so empfiehlt es sich, wenigstens eine der Gurtungen dem Verlaufe der nächstliegenden Druckflächengrenze möglichst anzuschliessen. Voraussetzung ist, dass in dem betreffenden Falle die Befolgung der Regel keine allzugrosse Vermehrung der Gurtungslängen mit sich bringt.

Beim Beweise dieser Regel wird nur auf die Gurtungsspannungen und das für die Gurtungen nothwendige Material Rücksicht genommen, während das Material der Füllungstheile nicht in Betracht gezogen wird.

In Fig. 17 ist die Hälfte der Druckfläche eines gewöhnlichen Bogenträgers mit 3 Gelenken dargestellt. Es handelt sich darum, die günstigste Gestalt des Fachwerkes zu ermitteln, durch welches das eine Auflagergelenk mit dem Scheitelgelenke verbunden werden soll. Denken wir uns, die vier Punkte $ABCD$ seien Knotenpunkte und die von ihnen in der Figur ausgehenden Linien Stäbe des Fachwerks. In der Figur ist angenommen, dass an der betreffenden Stelle alle Theile des Fachwerks oberhalb der Druckfläche liegen.

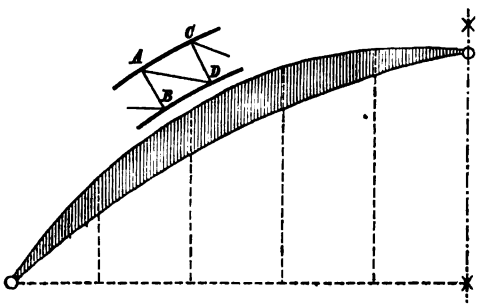


Fig. 17.

Verändert man nun die Gestalt des Fachwerks so, dass der betrachtete Theil desselben näher an die obere Druckflächengrenze heranrückt, während die Trägerhöhe überall ungeändert bleibt, so vermindern sich nothwendiger Weise die Grenzspannungen der Gurtungsstäbe.

Die Spannung eines Gurtungsstabes, die einem gegebenen Belastungsfalle entspricht, wird nämlich leicht dadurch gefunden, dass man einen Schnitt durch die Construction legt, der die Stäbe AC, AD und BD trifft und durch Aufstellung der Momentengleichung in Bezug auf einen geeignet gewählten Punkt die Bedingung für das Gleichgewicht des einen Trägertheiles ausspricht. (Bezüglich der näheren Erklärung über diese Ermittelung der Stabspannungen verweisen wir auf das zweite Capitel und setzen in den folgenden Erörterungen diese Methode als bekannt voraus.)

Durch die Annäherung aller Knotenpunkte $ABCD$ an die Druckfläche werden aber nothwendiger Weise die Hebelarme jedes irgend einer Belastung entsprechenden Mitteldruckes in Bezug auf diese Punkte kleiner, während andererseits die Hebelarme der Gurtungsspannungen in Bezug auf ihre Momentenpunkte der Voraussetzung nach sich nicht ändern sollen.

Damit ist aber erwiesen, dass man durch die beschriebene Annäherung der Trägergestalt an die Druckflächengrenze geringere Gurtungsspannungen erhält, also auch geringere Gurtungsquerschnitte zur Anwendung bringen kann.

Aendert man die Trägerform in demselben Sinne weiter, so dass an der betrachteten Stelle der eine Gurtungsstab in die Druckfläche hineinfällt, wie in Fig. 18, so behalten die vorigen Betrachtungen bis zu einem gewissen Grade ebenfalls noch Gültigkeit. Unbeschränkt gelten dieselben namentlich für den in die Druckfläche hereinfallenden Gurtungsstab, dessen Spannungen fortwährend geringer werden, je mehr sich der Momentenpunkt desselben der Druckfläche nähert. Auch für den anderen Stab vermindern sich die Grenzspannungen erheblich, dafür nehmen dieselben aber verschiedenes Vorzeichen an, und nach den auf die Wöhler'schen Versuche gestützten Ansichten über die »Arbeitsfestigkeit« der Materialien kann sich dadurch trotzdem eine Vergrösserung des Stabquerschnittes erforderlich machen.

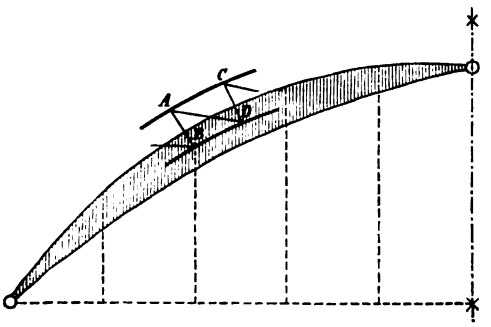


Fig. 18.

Fallen die Gurtungen des Trägers ganz mit den beiden Druckflächengrenzen zusammen, so sind beide Stäbe fortwährend gedrückt (resp. bei einem Träger, dessen Scheitelgelenk tiefer liegt als die Auflagergelenke, fortwährend gezogen), während die untere Grenzspannung gleich Null ist. Bei einer solchen Träger-Anordnung gestalten sich die Gurtungsspannungen jedenfalls besonders günstig.

Geht man von dieser letzteren Anordnung aus und lässt jetzt die Trägerhöhe wachsen, so werden sich im Allgemeinen wegen des verschiedenen Wachsens der Hebelarme die oberen Grenzspannungen etwas vermindern; die unteren Null überschreiten. Die Gurtungs-Querschnitte werden also noch etwas geringer gehalten werden können, als vorher. Dagegen vermehren sich die Längen der Füllungstheile und man wird deshalb im Allgemeinen mehr Material für diese aufwenden müssen.

Aus diesen Erwägungen geht wenigstens hervor, dass im Allgemeinen gewichtige Gründe für die Befolgung der »Druckflächenregel« sprechen, die in jedem gegebenen Falle wenigstens so viel als möglich berücksichtigt werden sollten, wenn auch andere Verhältnisse dazu nöthigen, mehr oder weniger von den Forderungen der »Regel« abzuweichen. Jedenfalls werden wir daher die Druckflächenregel als einen sehr geeig-

neten ersten Anhaltspunkt für die Gestaltung des Trägerkörpers bezeichnen dürfen, der ausserdem noch den Vorzug grosser Anschaulichkeit besitzt.

Fortsetzung.

§ 34. Die Gründe, welche gegen eine stricte Befolgung der Druckflächenregel sprechen können, sind vorwiegend praktischer Natur. Erstens wird von dem Träger in den meisten Fällen verlangt, dass wegen der bequemeren Herstellung der Fahrbahntafel eines Brückenträgers oder der Dachfläche einer Dachconstruction, die eine Gurtung des Trägers dem Verlaufe dieser zum Voraus gegebenen Linie folge. Es würde dann nur noch übrig bleiben, die andere Gurtung so günstig als möglich zu gestalten. — Zweitens ist aber der den Träger ausführende Unternehmer zum Voraus gegen alle sog. »krumme Arbeit« eingenommen, deren Herstellung umständlicher und dadurch theurer ist.

Zu diesen Gründen kann noch der dritte treten, dass man unter Umständen aus Rücksicht auf die Spannung oder Anordnung der Füllungstheile von den Forderungen der Druckflächenregel abweicht. Als vierter Grund könnte schliesslich noch die Rücksicht auf eine solide Quer- und Windverstrebung in Betracht kommen.

Würden die aufgezählten praktischen Rücksichten in der That so zwingender Natur sein, als man zuweilen versichern hört, dann würde es sich allerdings nicht lohnen, über die Forderungen nachzusinnen, die die Theorie an ein günstig gestaltetes Trägersystem stellt.

Es ist aber ein eigenthümlicher Umstand, dass wir gerade aus der Literatur und den Bauausführungen von Ländern, in denen auf praktische Constructionen der grösste, auf fruchtlose theoretische Speculationen gar kein Werth gelegt wird, Beispiele anführen können, die beweisen, dass man dort ungefähr dieselben Ueberlegungen angestellt hat und zu ähnlichen Schlüssen gelangt ist, wie die hier auseinandergesetzten.

So hat beispielsweise Claxton-Fidler im Jahrgange 1875 des »Engineering« einen grösseren Aufsatz unter dem Titel »Arched ribs and suspension bridges« veröffentlicht, in dem er der Frage nach der günstigsten Gestalt des Bogenträgers mit 3 Gelenken näher tritt und dazu gelangt, eine Form zu empfehlen, die sich fast genau der Druckfläche des Trägers anschliesst. Dass der Weg der Herleitung dort ein von dem unserigen wesentlich verschiedener ist, bedarf wohl kaum der Erwähnung. Jedenfalls hat unsere Ableitung den wesentlichen Vorzug vor jener, dass sie auf strenge wissenschaftliche Begriffe aufgebaut ist, und an die Stelle von Schlüssen, die auf wenig präcisirten, wir möchten sagen individuellen Anschauungen begründet sind, eine wissenschaftliche Methode gesetzt hat.

Ein anderes Beispiel bietet die Point-Brücke über den Monongahela-Fluss bei Pittsburgh, von Seefehlner in der Zeitschrift des Hannöver-

schen Architekten- und Ingenieur-Vereins Jahrg. 1879, 1. Heft, beschrieben. Die Träger der Mittel-Oeffnung werden dort zwar als versteifte Hängebrücke, System Hemberle aufgeführt, sind indessen als umgekehrte Bogenträger mit 3 Gelenken zu bezeichnen. Dass die Längsträger der Brücke continuirlich durchgehen, ist hier von untergeordneter Bedeutung, da nach der Zeichnung zu urtheilen das Trägheits-Moment derselben so gering ist, dass sie nur als eine secundäre Längs-Construction aufzufassen sind. Auch scheint aus den dürftigen Angaben über die Berechnung des Trägers hervorzugehen, dass die Continuität der Längsträger in der That nicht in Betracht gezogen wurde.

Die Gestalt des Trägers ist hier wenn auch nicht genau, so doch annähernd dem Verlaufe der Druckfläche angepasst. Die als Kette bezeichnete untere Gurtung liegt offenbar innerhalb der Druckfläche, die obere Gurtung ganz ausserhalb derselben. Daraus folgt, dass die untere Gurtung stets gezogen ist, während die obere abwechselnd Zug und Druck auszuhalten hat. — Auf Tafel I findet man dieses System skizzirt.

Auch in Deutschland findet man die sichelförmige Gestalt der Träger zuweilen erwähnt, so z. B. in dem Aufsatze von Schäffer: »Graphische Ermittelung der Grenzspannung für den Bogen mit drei Charnieren«, Zeitschrift für Bauwesen, Jahrg. 1875. Man scheint aber bisher auf diese Form kein Gewicht gelegt zu haben.

Wir glauben in der Ausführung der Pointbrücke den praktischen Nachweis dafür erblicken zu dürfen, dass für Bauwerke von bedeutender Grösse die Anlehnung an die theoretisch als vortheilhaft erkannten Formen geradezu geboten ist, da die oben erwähnten praktischen Nachtheile hier doch weniger ins Gewicht fallen. Die grosse Oeffnung der Pointbrücke hat die kolossale Spannweite von ungefähr 240^{m}. Man darf es als nahezu undurchführbar bezeichnen, eine solche Spannweite durch einen gewöhnlichen Balkenträger zu überbrücken. Dies weist uns darauf hin, dass wir uns mit der Auffindung und Ausbildung neuer Formen beschäftigen müssen, wenn wir solchen Aufgaben gewachsen sein wollen.

Zweites Capitel.

Specielle Theorie des statisch bestimmten Fachwerks.

I. Berechnung der statisch bestimmten Balkenträger.

Allgemeines.

§ 35. Die specielle Fachwerkstheorie hat sich zunächst mit der eingehenden Berechnung und Betrachtung gegebener Fachwerksträger zu beschäftigen. Ausserdem fällt ihr aber noch die Aufgabe zu, auf Grund dieser speciellen Betrachtungen die verschiedenen möglichen und unter diesen namentlich auch die günstigsten speciellen Ausführungsformen gegebener Trägertypen aufzusuchen.

Zur Berechnung der Träger muss die Belastung, welche von ihnen aufgenommen werden soll, gegeben sein. Wir werden zunächst die verschiedenen Methoden betrachten, deren man sich zur Ermittelung der Stabspannungen bedienen kann, wenn das den Träger afficirende Lastensystem vollständig gegeben ist. Darauf werden wir zeigen, wie man die Stellung eines unveränderlichen, aber gegen den Träger beweglichen Lastensystems ermitteln kann, bei der ein gewisser Stab eine Maximal- oder Minimal-Spannung erfährt.

Unter diesem beweglichen Lastensysteme hat man einen möglichst ungünstig zusammengesetzten Eisenbahnzug zu verstehen. Es liegt zwar

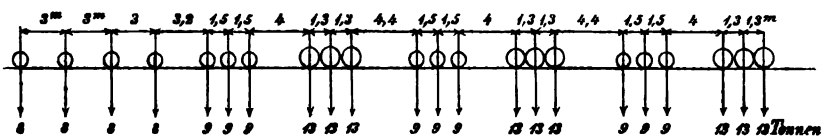


Fig. 19.

nicht im Plane dieses Buches, auf die Details der Berechnungen genauer einzugehen, als zu dem allgemeinen Verständnisse der Theorie erforderlich ist. Wir wollen aber, um die Vorstellungen zu fixiren, hier nicht unterlassen, in Fig. 19 einen Eisenbahnzug von der Zusammensetzung, welche man bei der Berechnung der Brücken als die ungünstigste anzusehen

pflegt, anzugeben. Derselbe ist dem Werke von Winkler »Theorie der Brücken« (Wien 1875) entnommen. Es ist angenommen, dass vorn drei Locomotiven nebst Tender stehen, während hinten möglichst schwere Güterwagen folgen.

Die allgemeine Methode der Berechnung der Fachwerksträger haben wir bereits im vorigen Capitel auseinandergesetzt. Für die wirkliche Durchführung dieser Rechnung zieht man indessen Methoden vor, die bequemer zum Ziele führen. Die Möglichkeit, solche bequemere Methoden zur Anwendung bringen zu können, beruht auf der Eigenschaft der gewöhnlich zur Ausführung gebrachten möglichst einfach gestalteten statisch bestimmten Fachwerke, durch Schnitte, die zur Längsrichtung senkrecht stehen, nur in drei Stäben getroffen zu werden. (Vergl. § 27.)

Wir werden hier vier specielle Methoden der Ermittelung der Stabspannungen aufzählen: die analytische, die Ritter'sche und zwei graphische Methoden.

Bei allen diesen speciellen Methoden werden zuerst die Auflager-Reactionen für den gegebenen Belastungsfall berechnet und darauf erst zur Bestimmung der Stabspannungen geschritten. Für den Balkenträger ermittelt man die senkrecht gerichteten Auflagerdrücke sehr einfach durch Aufstellen von Momenten-Gleichungen, wie wir als bekannt voraussetzen dürfen.

Da die erwähnten speciellen Methoden sich theilweise auch ohne wesentliche Aenderung auf die Berechnung anderer Fachwerksträger anwenden lassen, sollen im Folgenden nicht immer ausdrücklich Balkenträger vorausgesetzt werden.

A. Analytische Methode.

§ 36. Zur Ermittelung irgend einer Stabspannung legt man einen Schnitt mm durch die Construction, der ausser dem betrachteten nur noch zwei andere Stäbe trifft. Die Spannungen der durchschnittenen Stäbe kann man sich alsdann durch äussere Kräfte ersetzt denken, die mit den an jedem der beiden Theile des Trägers angreifenden äusseren Kräften für sich Gleichgewicht halten müssen.

Die Bedingung, dass dieses Gleichgewicht thatsächlich stattfinde, lässt sich aber bekanntlich durch drei von einander unabhängige Gleichungen ausdrücken, durch deren Auflösung man die Stabspannungen erhält.

Mit Bezug auf Fig. 20 schreiben wir zwei Gleichungen an, die ausdrücken, dass in horizontaler und vertikaler Richtung die algebraische Summe der Componenten gleich Null ist, während die dritte Gleichung ausspricht, dass in Bezug auf den Punkt O (der übrigens auch beliebig anders gewählt werden konnte) die algebraische Summe der statischen Momente der am linken Trägertheile angreifenden Kräfte gleich Null sein muss, wenn Gleichgewicht stattfinden soll.

Diese Gleichungen lauten:

$$A\cos\alpha - B\cos\beta - C\cos\gamma + H = 0\,,$$
$$A\sin\alpha - B\sin\beta - C\sin\gamma + R = 0\,,$$
$$Cc\cos\gamma + Hh - Rr = 0\,.$$

Die Spannungen der Stäbe wurden bei Aufstellung der Gleichungen sämmtlich als Zugspannungen in die Rechnung eingeführt. Ein negatives Resultat würde demnach anzeigen, dass der betreffende Stab eine Druckspannung erfährt.

Die am linken Theile des Trägers angreifenden primären und secundären äusseren Kräfte wurden der Bequemlichkeit der Rechnung halber zu einer Resultirenden zusammengesetzt und diese selbst wieder in eine horizontale Componente H und eine vertikale Componente R zerlegt gedacht. Für den Balkenträger, der nur mit senkrechten Lasten beschwert ist, würde H gleich Null zu setzen sein.

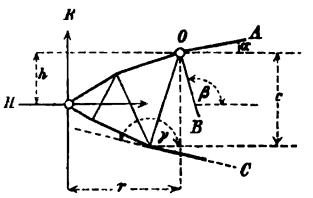


Fig. 20.

Für diesen letzteren Fall kommen in den angeschriebenen Gleichgewichtsbedingungen von Ausdrücken, die sich auf den speciellen Belastungsfall des Trägers beziehen, nur die Grössen R und Rr vor. Von diesen hängen daher die Spannungen der betrachteten Stäbe allein ab. Man hat der Grösse R, welche durch die algebraische Summirung aller am linken Balkentheile angreifenden äusseren Kräfte gefunden wird, den Namen »abscheerende Vertikalkraft« oder auch kurzweg Vertikalkraft für den Schnitt mm beigelegt. Die Grösse Rr, die der algebraischen Summe der statischen Momente der am linken Balkentheile wirkenden äusseren Kräfte genommen in Bezug auf den Punkt O gleich ist, nennt man das Biegungsmoment in Bezug auf diesen Punkt für den Schnitt mm.

Die abscheerende Vertikalkraft wird in der Regel mit dem Buchstaben V, das Biegungsmoment mit M bezeichnet.

B. Ritter'sche Methode.

§ 37. Diese nach ihrem Autor, Herrn Prof. Ritter in Aachen, benannte Methode unterscheidet sich dadurch von der vorhergehenden, dass man die drei Gleichgewichtsbedingungen, die sich für das Gleichgewicht des linken Balkentheiles unter dem Einflusse der an demselben angreifenden äusseren Kräfte und den Spannungen der drei durchschnittenen Stäbe anschreiben lassen, in solcher Form aufstellt, dass in jeder derselben nur je eine der drei Unbekannten auftritt.

Zu diesem Zwecke schreibt man keine Componentengleichungen, sondern drei Momentengleichungen an, die sich auf die drei Eckpunkte des Dreiecks beziehen, das von den Richtungslinien der Stäbe gebildet

wird. In jedem solchen Punkte schneiden sich die Richtungslinien zweier der Stabspannungen, die daher aus der Momentengleichung herausfallen. Man nennt diese Punkte Momentenpunkte, und zwar jeden derselben den Momentenpunkt für jenen Stab, dessen Richtungslinie in dem erwähnten Dreiecke ihm gegenüber liegt. In Fig. 21 sind die Punkte *MNO* die Momentenpunkte der drei vom Schnitte *mm* getroffenen Stäbe.

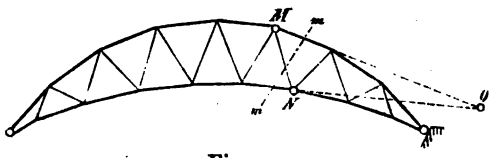


Fig. 21.

Dass die drei Momentenpunkte *MNO* in der That stets ein Dreieck bilden müssen, geht daraus hervor, dass sich die Richtungslinien der drei Stäbe, durch die der Schnitt gelegt ist, nicht in demselben Punkte treffen dürfen, wie im vorigen Capitel bewiesen wurde. Einer der Dreiecks-punkte kann jedoch ins Unendliche fallen. Man ersetzt in diesem Falle die entsprechende Momentengleichung durch eine Componentengleichung, in der ebenfalls nur eine Unbekannte auftritt.

Die Vorzüge der Ritter'schen Methode bestehen theils in der wesentlich erleichterten Lösung der Aufgabe für einen gegebenen Belastungsfall, theils in der Möglichkeit, die Untersuchungen über die ungünstigste Stellung eines Lastensystems in sehr einfacher und dabei sehr übersichtlicher Weise durchzuführen. Die in den Momentengleichungen vorkommenden Hebelarme, sowie die bei den soeben angedeuteten Untersuchungen vorkommenden Ortsbestimmungen werden auf der Zeichnung ermittelt, was eine ganz bedeutende Zeitersparniss gegenüber der rechnerischen Methode ermöglicht.

C. Erste graphische Methode.

§ 38. Diese für die Berechnung der Stabspannungen eines Fachwerkträgers bei gegebenem Belastungsfalle sehr anschauliche und bequeme und neuerdings mit grosser Vorliebe verwendete Methode beruht auf dem Satze der Mechanik, dass die geometrische Summe aller auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte gleich Null sein muss, wenn sich dieselben im Gleichgewichte halten sollen.

Bezüglich des Ausdrucks geometrische Summe erinnern wir daran, dass darunter nicht die Summe der absolut genommenen Masse der Kräfte, sondern die Summe mit Berücksichtigung der Richtungen zu verstehen ist. Eingehendere Erläuterungen dieses Begriffes findet man u. A. in Grassmann's »Ausdehnungslehre« (Berlin 1862) oder Schell, »Theorie der Bewegung und der Kräfte« (Leipzig 1870).

Man kann den oben erwähnten Satz auch so aussprechen, dass ein Linienzug, den man erhält, wenn man den Kraftrichtungen parallele

Strecken, die den Grössen der Kräfte proportional sind, in der Richtung der aufeinanderfolgenden Pfeile aneinander reiht, in sich selbst zurückkehren muss, wenn die Kräfte Gleichgewicht halten sollen. Man nennt diesen Linienzug ein Kräftepolygon. Bildet dasselbe in einem gegebenen Falle keine geschlossene Figur, so stellt die Verbindungslinie von Anfangs- und Endpunkt die Resultirende aus den am Punkte wirkenden Kräften nach Grösse und Richtung dar. Der Pfeil dieser Resultirenden ist aber dem Sinne entgegengesetzt zu nehmen, in dem die Componenten aneinandergereiht wurden.

Wir wissen aus den geometrischen Untersuchungen des ersten Capitels, dass die Fachwerksträger, abgesehen von den kleinen elastischen Formänderungen, deren sie fähig sind, starre und unbewegliche Figuren bilden, dass also alle Punkte derselben sich in Ruhe befinden und die an diesen angreifenden Kräfte sich im Gleichgewichte halten müssen.

Auf Grund dieser Sätze und mit Bezug auf Fig. 22 verfährt man zur Bestimmung der Stabspannungen des möglichst einfach gestalteten Fachwerkes wie folgt.

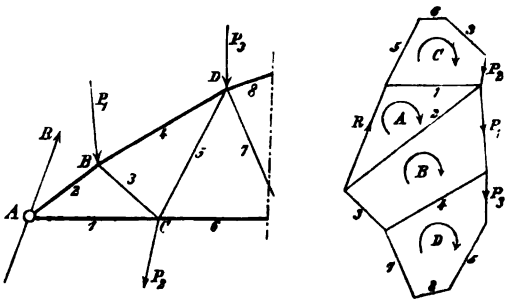


Fig. 22.

Man construirt zunächst ein geschlossenes Polygon für die am Auflagerpunkte A angreifenden Kräfte R, S_1 und S_2, welche letzteren die Spannungen der Stäbe mit den beigesetzten Nummern bedeuten. Die Auflager-Reaction R denkén wir uns schon zum Voraus ermittelt, wie bereits in der Einleitung zu diesem Capitel angedeutet wurde. Das Kräftepolygon des Punktes A ist eindeutig bestimmt, da dasselbe ein Dreieck bildet, von dem eine Seite (die Kraft R) vollständig, die übrigen der Richtung nach bekannt sind. Durch diese Construction findet man die Grösse der Kräfte S_1 und S_2, dargestellt durch die entsprechenden Seiten des Kräftedreiecks.

Hierauf geht man zur Betrachtung des Knotenpunktes B über. Von den an demselben angreifenden Kräften S_2, S_3, S_4, P sind alle der Richtung nach und zwei, nämlich P und S_2, jetzt auch der Grösse nach bekannt. Das Kräftevieréck für den Punkt B ist daher eindeutig bestimmt, und durch die Construction desselben findet man die Stabspannungen S_3 und S_4 als Seiten dieses Polygons.

Dann geht man zum Knotenpunkte C über, an dem jetzt nur noch zwei der Grösse nach unbekannte Kräfte angreifen, von da zum Punkte D und so fort.

Die den einzelnen Knotenpunkten entsprechenden Kräftepolygone können entweder einzeln als selbständige Figuren gezeichnet werden, oder man kann durch ein Aneinanderlegen derselben mit den gleichen Seiten eine einheitliche Figur erhalten, in der jedes Kräftepolygon vorkommt. Man nennt eine solche Figur einen Kräfteplan.

Die einzelnen Kräftepolygone können in sehr mannigfaltiger Weise zu Kräfteplänen gruppirt werden, je nach den Seiten, mit denen man die neu hinzukommenden Polygone an die schon vorhandene Figur anschliesst. Die meisten Knotenpunkte besitzen nämlich 4 Stäbe, von deren Spannungen zwei bereits bekannt sind, wenn man zur Construction des Kräftepolygones schreitet. Diese beiden bekannten Stabspannungen

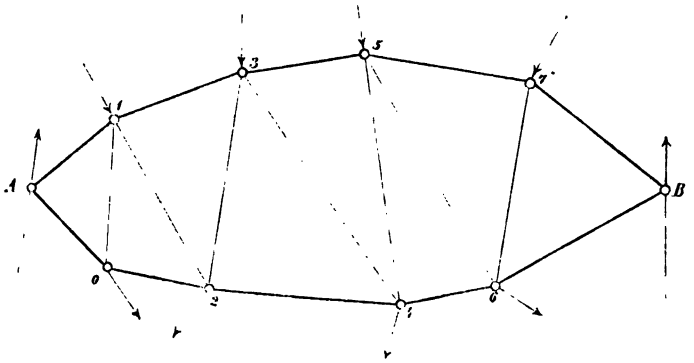


Fig. 23a.

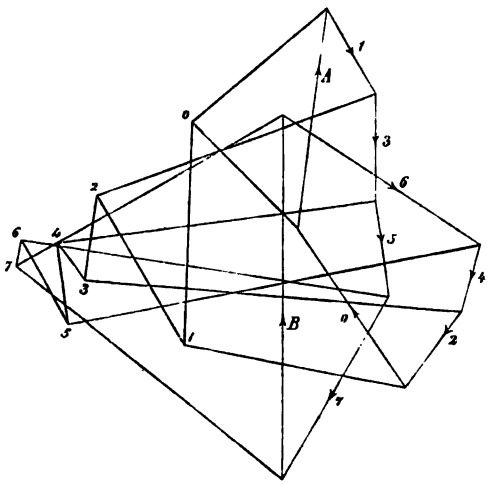


Fig. 23b.

kommen also in dem bis dahin fertigen Theile des Kräfteplanes bereits als Seiten vor, und es ist dem Construirenden freigestellt, an welche derselben er das neue Polygon anschliessen will. Ausserdem bleibt in der Anordnung des Polygones selbst noch ein gewisser Spielraum.

Wenn auch die besondere Anordnung des Kräfteplanes für das Schlussresultat — abgesehen von den bei der einen Figur vielleicht mehr als bei der anderen ins Gewicht fallenden unvermeidlichen Ungenauigkeiten der Zeichnung — vollständig gleichgültig ist, so lässt sich doch die Frage aufwerfen, welche Anordnung als die zweckmässigste zu

betrachten sei. Es ist diese die möglichst einfache, in der nämlich jede Stabspannung nur einmal als Seite im Kräfteplane auftritt.

Bezüglich der Theorie solcher Kräftepläne, deren eingehendere Reproduction uns hier nicht am Platze zu sein scheint, verweisen wir auf das Werk von Culmann: »Graphische Statik«, zweite Auflage, Zürich 1875, Nr. 81 und 82. Wir entnehmen demselben die zusammengehörigen Figuren 1 und 2 der Tafel 10, die die Holzschnitte Figuren 23a und 23*b* (S. 56) darstellen. Dieselben zeigen ein Fachwerk möglichst einfacher Gestalt, für das die an den Knotenpunkten angreifenden Kräfte gegeben sind, nebst dem dazu gehörigen möglichst einfachen Kräfteplane, den Culmann aus Gründen, die dort nachzulesen sind, einen reciproken Kräfteplan, und zwar »nach Cremona« nennt.

Das Fachwerk in Figg. 23a u. b stellt den allgemeinsten Fall einer derartigen Construction typisch dar, und es wird daher dem Leser leicht fallen, für irgend einen gegebenen Specialfall mit Hülfe dieser Figuren den einfachsten Kräfteplan zu construiren, auch ohne dass er sich mit jener Theorie eingehender beschäftigt hat. Wir dürfen es übrigens wohl als selbstverständlich betrachten, dass diese Bemerkung nicht etwa das eingehendere Studium dieser Theorie als überflüssig bezeichnen soll.

D. Zweite graphische Methode.

§ 39. Die zweite hier zu erörternde graphische Methode beruht auf dem Satze, dass sich eine gegebene Kraft stets, und zwar auf eindeutige Weise in drei Componenten zerlegen lässt, deren Richtungslinien ein gegebenes Dreieck bilden, in dessen Ebene die gegebene Kraft liegt.

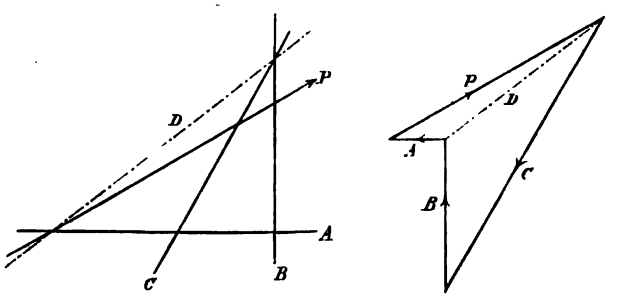


Fig. 24.

Stellen nämlich in Fig. 24 *P* die gegebene Kraft, *A*, *B* und *C* die Seiten des gegebenen Dreiecks vor, so lässt sich Grösse und Sinn von Kräften *A*, *B*, *C* angeben, deren Richtungslinien mit den gleichnamigen Dreiecksseiten zusammenfallen, und zwar so entweder, dass alle 4 Kräfte sich Gleichgewicht halten, oder so, dass *P* die Resultirende aus *A*, *B* und *C* ist. Den letzteren Fall erhält man aus dem zuerst genannten dadurch, dass man den Sinn der Kräfte *A*, *B*, *C* umkehrt.

Sollen *A*, *B*, *C*, *P* Gleichgewicht mit einander halten, so verbinde

man einen der drei Schnittpunkte von P mit den Dreiecksseiten mit dem dieser Seite gegenüber liegenden Eckpunkte. In der Figur wurde der Schnittpunkt von P und A verbunden mit dem durch B und C gebildeten Eckpunkte des Dreiecks durch die gestrichelt ausgezogene und mit D bezeichnete gerade Linie.

Denkt man sich nun A mit P und B mit C zu Resultirenden vereinigt, so müssen dieselben, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll, einander gleich sein, in derselben Geraden liegen und entgegengesetzten Sinn haben. Da nun die Resultirende aus A und P durch den Schnittpunkt der gleichnamigen Geraden und ebenso die Resultirende aus B und C durch den Schnittpunkt dieser Geraden gehen muss, so folgt, dass die Richtungslinie jeder derselben mit D zusammenfällt. Man kennt somit die Richtungslinie der Resultirenden von P und A, während von diesen beiden Kräften ebenfalls die Richtungslinie der zweiten und die erste vollständig bekannt ist. Hiermit lässt sich das Kräftedreieck construiren, wodurch sich A und die Resultirende von A und P ergeben. Mit der Resultirenden von A und P hat man aber auch zugleich die Mittelkraft aus B C gefunden, die sich von jener nur durch den verschiedenen Pfeil unterscheidet. Man kann demnach jetzt auch das Kräftedreieck für die Kräfte A, C und deren Resultirende ohne Weiteres construiren, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist. Dass dieselbe nur eine Lösung zulässt, wenn die Linien A, B und C ein Dreieck bilden, geht aus der Construction ohne Weiteres hervor.

Für die Bestimmung der Stabspannungen kann man das erläuterte Verfahren dadurch benützen, dass man den Fachwerkträger wie bei den unter A und B besprochenen Methoden durch einen Schnitt in zwei Theile trennt, der nur drei Stäbe trifft. Die am einen Trägertheile wirkenden und hier als bekannt anzusehenden äusseren Kräfte setzt man zu ihrer Resultirenden R zusammen und bestimmt hierauf die drei Stabspannungen so, dass sie mit R Gleichgewicht halten, wie es Fig. 25 andeutet.

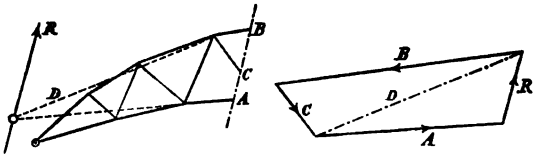


Fig. 25.

Ist der Träger ein Balkenträger, so wird R senkrecht gerichtet sein und im Allgemeinen eine unbequeme Lage besitzen, die leicht ausserhalb des Reissbrettes fällt. In diesem Falle kann man eine Methode benützen, deren Kenntniss der Verfasser den Vorträgen von Herrn Prof. Mohr verdankt. Wir erklären dieselbe an einem allgemein gehaltenen Beispiele im Zusammenhange mit einigen anderen Constructionen in den folgenden Paragraphen.

Fortsetzung.

§ 40. Ermittelung der Stabspannungen eines Fachwerkträgers nach der zweiten graphischen Methode. (Erklärung der Tafel 2.)

Tafel 2, Fig. 1 zeigt einen Fachwerkbalkenträger auf zwei Stützen, dessen eine Gurtung geradlinig und dessen Felderlängen (Entfernungen der Knotenpunkte der unteren Gurtung von einander) gleich gross angenommen wurden.

Bei der wirklichen Ausführung eines derartigen Trägers sind zwischen je zwei aufeinander folgenden Knotenpunkten der unteren Gurtung secundäre Längsträger-Constructionen eingeschaltet, welche die Lasten direct aufnehmen und dieselben wie gewöhnliche Balken auf ihre Auflagerpunkte — das sind die Fachwerksknotenpunkte — übertragen.

In Fig. 1 der Tafel ist die Stellung eines Eisenbahnzuges auf der Brückenfahrbahn eingetragen, die der Berechnung der Stabspannungen zu Grunde gelegt werden soll. Wir setzen zu diesem Zwecke in Fig. 2 das gegebene Lastensystem durch ein Seilpolygon zusammen. Dies geschieht dadurch, dass wir eine beliebige neue, aber schief gerichtete Kraft S hinzufügen und dieselbe zunächst mit dem vordersten Raddrucke P_1 zu einer Resultirenden S_1, diese wieder mit P_2 zu einer neuen Resultirenden S_2 zusammensetzen und in dieser Weise fortfahren. Das von den Richtungslinien der Kräfte S, S_1, S_2 u. s. f. gebildete Polygon wird das Seilpolygon genannt. Es ist mit Hülfe des Kräfteplanes Fig. 3 der Tafel leicht und bequem zu construiren.

Die Construction des Seilpolygons geschieht ohne Rücksicht auf die besondere Stellung des Eisenbahnzuges gegen die Brücke. Dieselbe Figur kann daher auch für jede andere Stellung des Zuges benützt werden, was die Durchführung der Rechnung sehr erleichtert.

Nun ziehen wir in Fig. 2 zwei vertikale Linien, die gegen das Lastensystem dieselbe relative Lage besitzen wie die Auflager-Vertikalen in Fig. 1. Die Schnittpunkte dieser Vertikalen mit den Seilpolygon-Seiten, in der Figur mit E und F bezeichnet, verbinden wir durch eine gerade Linie, die sogenannte Schlusslinie des Seilpolygons. Zieht man alsdann in Fig. 3 durch den Punkt O, den sogenannten Pol des Kräfteplans, eine Parallele zur Schlusslinie EF, so stellen die beiden dadurch entstehenden Abschnitte auf der Vertikalen des Kräfteplans die beiden Auflagerdrücke dar, die diesem Belastungsfalle entsprechen. Man überzeugt sich davon leicht wie folgt.

Die Lasten P in Fig. 1 und die ihnen entsprechenden Auflagerdrücke A und B stehen für sich im Gleichgewichte. Fügt man nun zu diesen Kräften eine beliebige neue Kraft S und setzt diese mit jenen

zusammen, so muss die Schlussresultirende wiederum die Kraft S sein. In Fig. 2 wurde diese Zusammensetzung ausgeführt und die Seilspannung S_{12}, deren Grösse aus dem Kräfteplane Fig. 3 entnommen werden kann, stellt die Resultirende aus der Kraft S und den Lasten P dar, die sich bei dem zu Grunde gelegten Belastungsfalle auf dem Träger befinden. Die Resultirende aus S_{12}, A und B muss daher wiederum die Kraft S ergeben. Die Resultirende R aus B und S_{12} geht durch den Schnittpunkt dieser beiden Kräfte, den wir mit F bezeichneten. Dieselbe muss aber auch durch den Schnittpunkt von A und S gehen, weil S die Resultirende aus R und A ist. Daraus folgt, dass die Richtungslinie von R mit der Schlusslinie EF zusammenfallen muss. Wir finden also die Grösse von R und A durch die Construction eines Kräfte-Dreiecks, dessen eine Seite S_{12} bekannt ist. Dasselbe Kräfte-Dreieck entsteht aber im Kräfteplane durch das Ziehen der bezeichneten Parallelen, woraus die Behauptung folgt.

Fortsetzung.

§ 41. Wir legen jetzt einen vertikalen Schnitt mm durch den Träger Fig. 1, Tafel 2, der die drei Stäbe X, Y, Z trifft, deren Spannungen jetzt ermittelt werden sollen. Die Spannungen dieser Stäbe müssen im Gleichgewichte stehen mit der Resultirenden aus den am linken Trägertheile angreifenden äusseren Kräften. Auf die Ermittelung dieser Resultirenden wird es daher zunächst ankommen.

Wir tragen die Schnittvertikale mm in derselben relativen Lage gegen das Lastensystem auch in die Seilpolygonfigur ein. Dieselbe trifft die Seilspannung S_6 und die Schlusslinie R des Seilpolygons. R ist aber die Resultirende aus S_6 und sämmtlichen am linken Trägertheile angreifenden äusseren Kräften. Daraus ergibt sich die Resultirende dieser letzteren in sehr einfacher Weise. Die Richtungslinie derselben ist nämlich eine Vertikale durch den Schnittpunkt von S_6 und R, während die Grösse derselben dargestellt wird durch das von den Strahlen R und S_6 des Kräfteplans begrenzte Stück der Kräfteplan-Vertikalen.

Würden wir in der soeben erklärten Weise verfahren, so würden wir aber stillschweigend die Voraussetzung machen, dass die Lasten sämmtlich unmittelbar auf das Trägerfachwerk wirkten, während doch in Wirklichkeit nur an den Knotenpunkten der unteren Gurtung die Auflagerdrücke der secundären Längsconstructionen als das Trägerfachwerk belastende Kräfte auftreten. Diesem Umstande lässt sich aber leicht Rechnung tragen, wie wir hier mit Hülfe einer besonderen Figur erklären wollen.

In Fig. 26 ist ein balkenartiger Träger gezeichnet, der nur an den Auflagerpunkten A und B und an den Punkten K und L äussere Kräfte aufnehmen soll. Durch die Punkte K und L wird er in drei Felder getheilt, in denen die Lasten durch secundäre Längsträger unterstützt

werden, die ihrerseits ihr Auflager in den Punkten A, K, L und B finden. Die auf den Träger wirkenden Lasten sind durch ein Seilpolygon zusammengesetzt. Zieht man nun durch die Punkte K und L verticale Linien und ermittelt deren Schnittpunkte K_1 und L_1 mit dem Seilpolygone, so lässt sich beweisen, das das Polygon, das die Punkte A_1, K_1, L_1 und B_1 verbindet, das richtige Seilpolygon ist für die Lasten, die der Balken von den secundären Längsträgern als deren Auflagerdrücke direct empfängt.

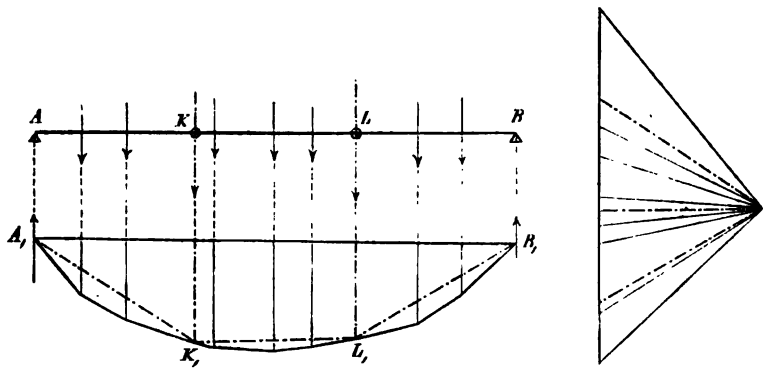


Fig. 26.

Das zwischen K_1 und L_1 liegende Stück des ursprünglichen Seilpolygons kann nämlich angesehen werden als ein Seilpolygon, welches die Lasten mit einander verbindet, die auf den zwischen K und L eingeschalteten secundären Längsträger wirken und dessen Schlusslinie K_1 L_1 ist. Ebenso wird der Kräfteplan dieses letzteren Polygons durch den entsprechenden Theil des ganzen Kräfteplans dargestellt, und die Auflagerdrücke des secundären Längsträgers zwischen K und L ergeben sich als die Abschnitte, welche von dem zu $K_1 L_1$ parallel gezogenen Strahle und jenen Strahlen auf der Vertikalen des Kräfteplans begrenzt werden, welche die Lasten einschliessen, die auf der Strecke KL vertheilt sind.

Genau dasselbe lässt sich von den zwischen den Punkten A, und K_1, sowie L_1 und B, liegenden Theilen des Seilpolygons und den ihnen entsprechenden Theilen des Kräfteplanes behaupten. Die gestrichelt ausgezogenen Strahlen des Kräfteplanes sind den Linien A, K_1, $K_1 L_1$, $L_1 B$, parallel gezogen. Die von ihnen und den beiden äussersten Strahlen eingeschlossenen Abschnitte auf der Vertikalen des Kräfteplans stellen hiernach die primären äusseren Kräfte dar, welche in den Punkten A, K, L und B direct auf den Balken einwirken.

Das Polygon A, K, L, B, lässt sich demnach ansehen als ein Seilpolygon, das für diese direct am Balken selbst angreifenden Lasten con-

struirt ist und dem der aus den gestrichelten Strahlen bestehende Kräfteplan entspricht.

Man übersieht sofort, dass dieser Beweis auch für einen ganz allgemein gehaltenen Fall in derselben Form zu erbringen gewesen wäre. Nur um eine einfachere und leichter verständliche Figur zu erhalten, nahmen wir an, dass der Balken in nur drei Felder eingetheilt sei.

Dieselbe Correctur, welche hier erläutert wurde, müssen wir nun auch an dem Seilpolygone auf Tafel 2 vornehmen. Das hierdurch entstehende, für das Trägerfachwerk gültige Polygon wurde zur Unterscheidung von dem anderen durch strichpunktirte Linien angegeben.

Die Resultirende V aus allen am linken Theile des durch mm zerschnittenen Fachwerks angreifenden äusseren Kräften finden wir jetzt, wie bereits oben angedeutet, durch Zusammensetzung der mitdurchschnittenen Seilspannung mit der in der Richtung der Schlusslinie wirkenden Kraft R. Die Lage dieser Resultirenden V wird durch die Vertikale durch den Punkt N, in dem sich diese Seilspannung mit der Schlusslinie schneidet, dargestellt. Grösse und Sinn ergeben sich aus dem Kräfteplane.

Um jetzt die Grösse der durch die betreffende Belastung hervorgerufenen Stabspannungen $X\,YZ$ zu ermitteln, können wir unmittelbar nach der in § 39 angegebenen Methode verfahren, da wie dort P, A, B, C, hier die Kräfte V, X, Y, Z sich im Gleichgewichte befinden müssen. Aus den am Schlusse dieses § angegebenen Gründen empfiehlt sich aber mehr, den jetzt zu erläuternden Satz zu benützen.

Die Kraft V lässt sich nämlich durch zwei vertikale Kräfte T und U ersetzen, die durch die Endpunkte des durchschnittenen Feldes gehen und die den Abschnitten umgekehrt proportional sind, die auf diesen Vertikalen durch das Seilpolygon und dessen Schlusslinie begrenzt werden. Der Beweis ist sehr einfach. Es ist ein bekannter Satz der Mechanik, dass eine gegebene Kraft sich stets in zwei Componenten zerlegen lässt, deren Richtungslinien sich mit der Richtungslinie der gegebenen Kraft in einem Punkte schneiden, und zwar auch dann, wenn, wie es hier der Fall ist, dieser Schnittpunkt ein unendlich ferner ist. Dass aber die angegebene Proportionalität zutreffen muss, ergibt sich unmittelbar aus der Bemerkung, dass für den Punkt N die algebraische Summe der statischen Momente von T und U gleich Null sein muss.

Hat man die Maassstäbe so gewählt, dass in der Zeichnung die Poldistanz des Kräfteplans (das ist die horizontale Entfernung des Poles O von der Vertikalen des Kräfteplans) gerade gleich der Felderweite des Fachwerks ist, so wird ausserdem die Grösse der Kraft T unmittelbar durch den Abschnitt dargestellt, der auf der Richtungslinie von U durch das Seilpolygon und dessen Schlusslinie begrenzt wird, und zwar mit Bezug auf den Kräftemaassstab, der der Construction des Kräfteplans zu

Grunde liegt. Ebenso wird die Grösse von U durch den Abschnitt auf der Richtungslinie von T dargestellt.

Wir beweisen diese Behauptung der Uebersichtlichkeit halber wiederum mit Hülfe einer besonderen Figur.

In Fig. 27 wurde angenommen, dass der Träger in 4 Felder getheilt sei, durch dessen zweites der Schnitt mm hindurchgeführt wurde. Das statische Moment der am linken Trägertheile angreifenden Kräfte, das sogenannte Biegungsmoment, in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Vertikalen mm, ist dann gleich $H.z$, wenn man mit H die Poldistanz des Kräfteplanes, die auch der Horizontalzug des Seilpolygons genannt wird, bezeichnet. Es ergibt sich dies aus der Bemerkung, dass die in der Schlusslinie des Seilpolygons wirkende Kraft R die Resultirende aus der von mm durchschnittenen Seilspannung und der Mittelkraft V der am linken Trägertheile angreifenden Kräfte ist. In Bezug auf den Punkt F muss daher das Moment von V dem der durchschnittenen Seilspannung gleich sein. Diese Seilspannung denken wir uns in eine horizontale und eine vertikale Componente im Schnittpunkte mit mm zerlegt. Davon ist die erstere gleich H und hat das Moment $H.z$, während die letztere durch F hindurchgeht und daher kein Moment hat. Die von dem Seilpolygone und seiner Schlusslinie begrenzte Fläche lässt sich demnach als eine graphische Darstellung der Biegungsmomente des Balkens für seine sämmtlichen Vertikalschnitte betrachten.

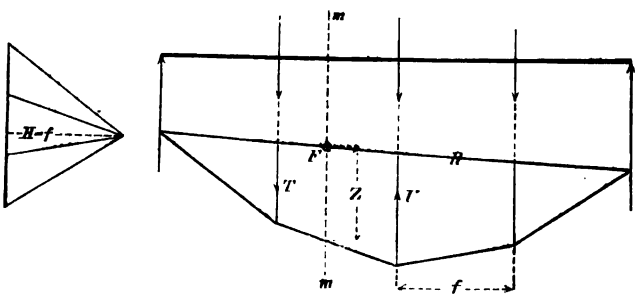


Fig. 27.

Die bezüglich der Grössen der Kräfte T und U aufgestellte Behauptung beweist sich nun sehr einfach. In Bezug auf einen beliebigen Punkt der Richtungslinie von U muss nämlich das Moment von T gleich und entgegengesetzt gerichtet sein dem Momente von V. Dieses letztere ist aber das Biegungsmoment des Balkens für den Vertikalschnitt U und wird also dargestellt durch den Abschnitt, welcher auf dieser Vertikalen durch das Seilpolygon und seine Schlusslinie begrenzt wird. Da nun das Moment von T gleich dem Producte aus der Grösse dieser Kraft und der Felderweite ist, so folgt, dass T in der That durch jenen Abschnitt auf der Richtungslinie von U unter Berücksichtigung des Maassstabes des Kräfteplans dargestellt wird, wenn die Poldistanz des Kräfteplans gleich der Felderweite ist.

Wäre dagegen H in der Zeichnung $n$mal so gross als die Felderlänge, so würde T $n$mal so gross als der Abschnitt auf U sein. Selbstverständlich kann man den Beweis in genau derselben Weise auch für die Grösse der Kraft U durchführen.

Schluss.

§ 42. In Fig. 4 der Tafel 2 wurde auf Grund der soeben erläuterten Sätze die Bestimmung der Stabspannungen X, Y, Z vorgenommen. Hat man das Seilpolygon des Lastensystems einmal construirt und die der augenblicklichen Stellung des Zuges entsprechende Schlusslinie eingetragen, so bedarf es nur noch der Construction zweier aneinander gelegter Dreiecke, aus denen man die genannten Stabspannungen ohne Weiteres erhält.

Man sieht die grossen Vorzüge dieses Verfahrens der Berechnung hinsichtlich der bequemen, leichten und namentlich sehr übersichtlichen Ausführung derselben, die ein Einschleichen grober Fehler fast unmöglich macht, ein, wenn man bedenkt, dass für jede beliebige andere Stellung des Eisenbahnzuges nur eine neue Schlusslinie in das ursprüngliche Seilpolygon eingetragen zu werden braucht, worauf man sofort durch die Construction einer so einfachen Figur, wie sie Fig. 4 der Tafel 2 ist, die Spannung jedes beliebigen Stabes, von dem dies verlangt wird, ermitteln kann.

Um die Zeichnung möglichst einfach und leicht verständlich zu halten, wurden nur die Spannungen X, Y, Z ermittelt. Nach dem Vorausgegangenen dürfte es auch den weniger Geübten unserer Leser leicht fallen, diese Construction auch für die übrigen Stäbe durchzuführen.

Zur Construction der Figur 4 selbst bemerken wir, dass X, Y, Z, T und U mit einander Gleichgewicht halten müssen und daher die Resultirende aus T und Z, sowie aus U, X und Y in die Richtung von Y fallen mussten. Wir konnten daher die angegebenen Kräftedreiecke construiren, aus denen sich zunächst X und Z als Seiten derselben ergeben, während Y der Differenz der in der Richtung des Stabes Y fallenden Seiten gleich ist.

Die Poldistanz des Kräfteplans ist auf der Tafel sechsmal so gross als die Entfernung der Richtungslinien von T und U von einander, was bei der Aufstellung des Kräftemaassstabes der Fig. 4 zu berücksichtigen war.

Bei der Durchführung des hier beschriebenen Verfahrens erhält man natürlich nur die durch das bewegliche Lastensystem hervorgerufenen Stabspannungen, während die dem Eigengewichte entsprechenden Spannungen für sich zu ermitteln und jenen hinzuzufügen sind.

Die Ermittelung der ungünstigsten Lastenstellung.

§ 43. Für die Dimensionirung der Stäbe eines Brückenträgers sind die Grenzen maassgebend, innerhalb deren die Stabspannungen bei verschiedener Stellung der Belastung schwanken können. Wir wenden uns jetzt zur Ermittelung dieser Grenzspannungen.

Die Grenzspannungen eines Stabes lassen sich sehr leicht nach einer der beschriebenen Methoden auffinden, wenn man die Stellung des Eisenbahnzuges, den man als grösste mobile Belastung voraussetzt, kennt, in Folge deren jene Grenzspannungen eintreten.

Zur Aufsuchung der ungünstigsten Stellung des gegebenen Lastensystems für irgend einen Stab Y erinnern wir an die Ritter'sche Methode der Berechnung der Stabspannung Y. Nach dieser Methode hat man sich den schon oft erwähnten Schnitt durch den Stab Y gelegt zu denken, worauf sich Y ergibt gleich dem Momente der an dem einen Trägertheile angreifenden äusseren Kräfte bezogen auf den Momentenpunkt von Y, dividirt durch die senkrechte Entfernung des Momentenpunktes von Y. Die letztere Entfernung bleibt sich, abgesehen von den kleinen elastischen Formänderungen, stets gleich, und die Stabspannung ist daher jenem Momente, das im Folgenden kurzweg das Moment von Y genannt wird, einfach proportional.

Ist der betrachtete Stab Y ein Gurtungsstab, so ist das Moment von Y einfach ein Biegungsmoment. In diesem Falle gestaltet sich die Behandlung erheblich einfacher und lässt sich auch aus der für einen Füllungsstab durchgeführten ableiten. Wir werden aus diesem Grunde zunächst einen Füllungsstab ins Auge fassen.

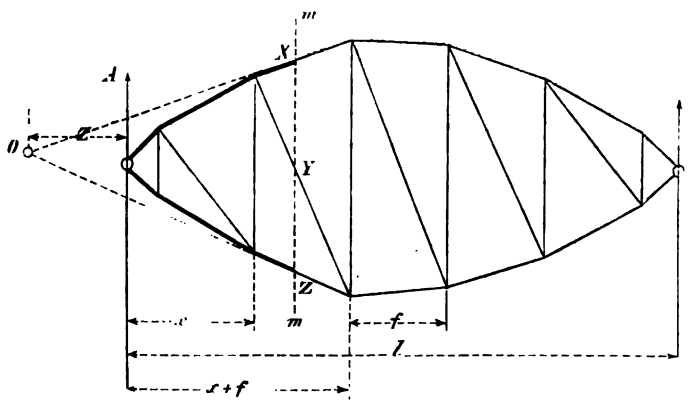


Fig. 28.

Mit dem Buchstaben P bezeichnen wir irgend eine Last des gegebenen Lastensystems, mit p deren Entfernung vom linken Auflager-

punkte. Bezüglich der Lage der Last P haben wir drei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Wirkt nämlich P auf den secundären Längsträger des durchschnittenen Feldes, so soll es mit dem Index 2 versehen werden, während P_1 eine Last vorstellt, die auf die Fahrbahnconstruction der weiter nach links hin liegenden Felder, und P_3 eine solche, die auf die weiter nach rechts liegenden Felder einwirkt.

Der Auflagerdruck, welcher in Folge der Lasten P_2 auf den linken Endknotenpunkt des durchschnittenen Feldes durch die Fahrbahnconstruction ausgeübt wird, soll $\mathfrak{A}$ heissen; dann ist mit Rücksicht auf die in Figur 28 eingeschriebenen Bezeichnungen

$$\mathfrak{A} = \sum_{x}^{x+f} P_2 \frac{x+f-p}{f} .$$

Der Auflagerdruck A des Balkens am linken Auflagerpunkte ist

$$A = \sum_{o}^{l} P \frac{l-p}{l} .$$

Daraus ergibt sich die Grösse der abscheerenden Vertikalkraft V des Fachwerks zu

$$V = A - \sum_{o}^{x} P_1 - \mathfrak{A} ,$$

oder, nach Einsetzung der oben gefundenen Werthe,

$$V = \sum_{x+f}^{l} P - \frac{1}{l} \sum_{o}^{l} Pp + \frac{1}{f} \sum_{x}^{x+f} P(p-x) ,$$

wobei noch zu berücksichtigen war, dass

$$\sum_{o}^{l} P - \sum_{o}^{x} P - \sum_{x}^{x+f} P = \sum_{x+f}^{l} P$$

gesetzt werden kann.

Zur Bestimmung der Lage der Resultirenden V stellen wir die Momentengleichung für den linken Auflagerpunkt des Trägers auf. Den Hebelarm von V in Bezug auf diesen Punkt nennen wir v. Dann muss $V \cdot v$ gleich der algebraischen Summe der Momente der am linken Theile des durchschnittenen Balkenfachwerkes angreifenden Kräfte in Bezug auf den linken Auflagerpunkt sein:

$$V \cdot v = \sum_{o}^{x} P_1 p + x \frac{1}{f} \sum_{x}^{x+f} P(x+f-p) .$$

Das Moment von Y (im Sinne der oben erwähnten Abkürzung), das jetzt mit dem Zeichen M_y bezeichnet werden soll, ist gleich dem statischen Momente von V in Bezug auf O, den Momentenpunkt des Stabes Y. Dasselbe lässt sich aus dem Ausdrucke für $V \cdot v$ leicht ableiten. Es ist

$$M_y = V(v-z) = V \cdot v - V \cdot z \,.$$

Das Product $V \cdot v$ ist nämlich stets positiv, wie aus der oben angeschriebenen Gleichung hervorgeht. V und v sind daher beide zugleich positiv oder negativ. Ist nun v positiv, d. h. hier (wie im Vorigen willkürlich angenommen wurde) nach links hin gelegen und dabei kleiner als z, so ist $(v-z)$ negativ, während der Absolutwerth von $(v-z)$ gleich dem Hebelarme von V in Bezug auf O als Momentenpunkt ist. Ebenso lässt sich auch für die Fälle, dass v grösser als z oder negativ ist, die Richtigkeit der angeschriebenen Gleichung nachweisen.

Durch Einsetzen der weiter oben gefundenen Ausdrücke finden wir jetzt den allgemeinen Ausdruck für das Moment von Y wie folgt

$$M_y = \sum_{o}^{x} Pp + \frac{x}{f} \sum_{x}^{x+f} P(x+f-p)$$
$$- z \left\{ \sum_{x+f}^{l} P - \frac{1}{l} \sum_{o}^{l} Pp + \frac{1}{f} \sum_{x}^{x+f} P(p-x) \right\}.$$

Dieser Ausdruck ändert sich während des Weiterschiebens des gegebenen Lastensystems nach rechts oder nach links hin unter allen Umständen stetig; und zwar auch dann, wenn dieses Weiterschieben den Uebertritt einer Last aus einem der drei Abschnitte, in die wir die ganze Spannweite eintheilten, in einen andern, oder das Hinzutreten von neuen Lasten auf die Brücke, oder endlich das Verlassen der Brücke von Lasten zur Folge hat. Man überzeugt sich davon leicht, wenn man die Aenderung untersucht, die M_y in Folge einer unendlich kleinen Verrückung des Eisenbahnzuges erfährt. Die Grösse dieser unendlich kleinen Verrückung nennen wir dp und haben dieselbe positiv zu rechnen, wenn sie nach rechts hin erfolgt, also eine Zunahme sämmtlicher Lasten-Abscissen p bewirkt.

Zunächst soll die der Verschiebung dp entsprechende Aenderung des Momentes von Y, die mit dM_y bezeichnet wird, unter der Voraussetzung ermittelt werden, dass in keines der drei Lastengebiete in Folge der Verschiebung Lasten hinzutreten, noch sich solche entfernen.

In diesem Falle ist

$$\frac{d}{dp} \sum_{o}^{x} Pp = \frac{\sum_{o}^{x} P(p+dp) - \sum_{o}^{x} Pp}{dp} = \sum_{o}^{x} P \,.$$

In gleicher Weise ergibt sich:

$$\frac{d}{dp}\sum_{x}^{x+f} P(x+f-p) = -\sum_{x}^{x+f} P\,,$$

$$\frac{d}{dp}\sum_{x+f}^{l} P = 0\,,$$

$$\frac{d}{dp}\sum_{0}^{l} Pp = \sum_{0}^{l} P\,,$$

$$\frac{d}{dp}\sum_{x}^{x+f} P(p-x) = \sum_{x}^{x+f} P\,.$$

Man erhält daher für den Differentialquotienten von M_y den Ausdruck

$$\frac{dM_y}{dp} = \sum_{0}^{x} P - \frac{z+x}{f}\sum_{x}^{x+f} P + \frac{z}{l}\sum_{0}^{l} P\,.$$

Nennt man die Summe aller im ersten Lastengebiete befindlichen Lasten L, die durchschnittliche Belastung des ganzen Balkens pro Längeneinheit γ und die durchschnittliche Belastung des durchschnittenen Faches φ, so lässt sich dieser Ausdruck auch schreiben:

$$\frac{dM_y}{dp} = L - (z+x)\,\varphi + z\gamma\,.$$

Dieser Ausdruck ist während des Weiterschiebens des Zuges constant, so lange keinem der drei Lastengebiete eine Last zugefügt oder entzogen wird. Tritt aber einer dieser letzteren Fälle ein, so ändert er sich im Allgemeinen sprungweise, um dann wieder so lange constant zu bleiben, bis abermals von einer Last eine der vier Grenzen der Lastengebiete überschritten wird.

Dass sich aber M_y unter allen Umständen stetig ändert, d. h. dass die einer unendlich kleinen Verrückung des Lastensystems entsprechende Aenderung desselben ebenfalls unendlich klein ist, lässt sich leicht dadurch beweisen, dass man das ganze Lastensystem in eine Einzellast und das System der dann noch übrig bleibenden Lasten zerlegt. Die so separirte Last soll aber jene sein, die während der Verrückung des Systems eine der Grenzen der Lastengebiete überschreitet.

Es ist durch die vorausgehenden Entwickelungen bereits erwiesen, dass die Aenderung von M_y, die einer Verrückung des übrig gebliebenen Lastensystems entspricht, mit dp von derselben Ordnung unendlich klein ist, (wobei der Fall, dass der Momentenpunkt ins Unendliche fällt, zunächst von der Betrachtung ausgeschlossen sein soll). Wir haben demnach nur noch den Nachweis zu führen, dass die Aenderung, welche M_y

durch die Ueberschreitung einer der Lastengrenzen durch die separirte Last erfährt, ebenfalls mit dp von derselben Ordnung unendlich klein ist.

Zu diesem Zwecke stellen wir Ausdrücke für die Momente von Y auf, die der Einwirkung einer einzelnen Last entsprechen, je nachdem diese Last im ersten, zweiten oder dritten Lastengebiete liegt, und unterscheiden dieselben wie vorher die Lasten durch Indices. Es ist

$$M_y' = \frac{z+l}{l} P_{,} p \,,$$
$$M_y'' = \frac{x+z}{f} P_{,,} (x+f-p) - z P_{,,} \frac{l-p}{l} \,,$$
$$M_y''' = - z P_{,,,} \frac{l-p}{l} \,.$$

Nimmt man nun an, dass die betrachtete Einzellast an einer der Grenzen des betreffenden Lastengebietes stehe und versteht beispielsweise unter $(M_y')_0$ den Werth, welchen das Moment annimmt, wenn die Abscisse der Last $p = 0$ ist, so ergibt sich

$$(M_y')_0 = 0 \,,$$
$$(M_y')_x = \frac{z+l}{l} P \cdot x \,,$$
$$(M_y'')_x = \frac{x+z}{f} P \cdot f - z P \frac{l-x}{l} = \frac{z+l}{l} P \cdot x \,,$$
$$(M_y'')_{x+f} = - z P \frac{l-x-f}{l} \,,$$
$$(M_y''')_{x+f} = - z P \frac{l-x-f}{l} \,,$$
$$(M_y''')_l = 0 \,.$$

Da hiernach $(M_y')_x = (M_y'')_x$ und $(M_y'')_{x+f} = (M_y''')_{x+f}$ sowie $(M_y')_0 = (M_y''')_l = 0$, so kann bei dem Ueberschreiten der Einzellast über eine der Grenzen der Lastengebiete keine sprungweise Aenderung des Momentes von Y erfolgen, womit die Behauptung, dass M_y eine stetige Function von p sei, erwiesen ist.

Mit Hülfe der für den Differentialquotienten $\frac{dM_y}{dp}$ gefundenen Formel, die nach den letzten Erörterungen für alle Fälle gültig bleibt, kann man jetzt ohne Schwierigkeit die ungünstigste Stellung des Lastensystems in Hinsicht auf den Stab Y ermitteln. M_y wird zu einem Grenzwerth, wenn der Zug so steht, dass eine unendlich kleine Verrückung nach rechts hin einen Zeichenwechsel von $\frac{dM_y}{dp}$ zur Folge hat. Der Grenzwerth ist ein Maximum, wenn der Differentialquotient vorher positiv war und dann negativ wird, während im entgegengesetzten Falle ein Minimum eintritt.

Hiernach kann (vorausgesetzt, dass z positiv ist) ein Maximalwerth

von M_y nur dann eintreten, wenn entweder ein Rad über der Grenze zwischen dem ersten und zweiten Lastengebiete oder auch, wenn ein solches über dem rechten Auflagerpunkte steht. Ebenso kann ein Minimalwerth von M_y nur durch eine solche Lastenstellung hervorgerufen werden, bei der entweder eine Last über der Grenze zwischen zweitem und drittem Lastengebiete oder über dem linken Auflagerpunkte sich befindet.

$\frac{dM_y}{dp}$ nimmt den Werth Null an, wenn die durchschnittliche Belastung jedes der drei Lastengebiete gleich gross ist. Dieser Fall kann sowohl einem Maximum als einem Minimum von M_y entsprechen.

Um in einem praktischen Falle die ungünstigste Laststellung zu ermitteln, ist es am zweckmässigsten, auf einem Papierstreifen die drei Lastengebiete in dem auf der Zeichnung des Lastensystems angewendeten Maassstabe nebeneinander aufzutragen und denselben längs des Lastensystems so lange zu verschieben, bis der verlangte Zeichenwechsel eintritt. Dieses probirende Aufsuchen der ungünstigsten Stellung der Last würde etwa in Fig. 2 der Tafel 2 vorzunehmen sein. Sofort nach Ermittelung dieser ungünstigsten Stellung könnte dann die entsprechende Grenzspannung des Stabes Y in der früher (§ 40 u. f.) beschriebenen Weise durch Ziehen weniger Linien aufgefunden werden.

Dass man bei Befolgung der hier beschriebenen Methode zur Bestimmung der Grenzspannungen in letzter Linie doch noch auf ein Probiren angewiesen ist, lässt sich nicht vermeiden, ist aber auch für die praktische Anwendung ohne jeden Nachtheil. Selbst bei Trägern über grossen Spannweiten kann man die durchzuprobirenden Fälle auf dem angedeuteten Wege sehr rasch erledigen. Allerdings muss diese Operation für jeden einzelnen Füllungsstab wiederholt werden.

Es kann sehr leicht vorkommen, dass M_y während des Passirens des Zuges mehrere Maximal- oder Minimalwerthe annimmt. In diesem Falle hat man die Grösse jedes einzelnen dieser Grenzwerthe zu ermitteln, um den absolut grössten aufzufinden.

Fortsetzung.

§ 44. Wir bemerkten bereits, dass die Ermittelung der Grenzspannung eines Gurtungsstabes als ein specieller Fall der im vorigen Paragraphen durchgeführten Untersuchung angesehen werden könnte. Die besondere Lage des Punktes O in Fig. 28 hatte nämlich für die Aufstellung des mit M_y bezeichneten Momentes und für die Aufsuchung der Grenzwerthe desselben keine principielle Bedeutung. Wir hätten eben so gut den Punkt O ganz beliebig in der Ebene annehmen und für ihn dieselbe Untersuchung durchführen können, die sich dadurch nicht im Geringsten geändert hätte.

Wir dürfen demnach die Formeln des vorigen Paragraphen auch hier beibehalten und haben nur an die Stelle von z die Abscissen des Momentenpunktes des betrachteten Gurtungsstabes zu setzen. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass im Vorigen z positiv gerechnet wurde, wenn es sich nach links hin vom linken Auflagerpunkte aus erstreckte. Wir haben demnach hier für z die negativ gerechnete Abscisse des genannten Momentenpunktes einzusetzen.

Hiernach erhält man für das Moment des Gurtungsstabes Z in Fig. 28 den folgenden Ausdruck

$$M_z = \sum_0^x Pp - \frac{x}{l} \sum_0^l Pp + x \sum_x^l P,$$

den man auch leicht direct hätte ableiten können.

Ferner wird

$$\frac{dM_z}{dp} = \sum_0^x P - \frac{x}{l} \sum_0^l P,$$

oder, mit Benützung der früher angewendeten Abkürzungen,

$$\frac{dM_z}{dp} = L - x\gamma.$$

Aus dieser Formel ergibt sich ein sehr einfaches Verfahren zur Bestimmung der ungünstigsten Lastenstellung, die praktisch in derselben Weise ausgeführt wird, wie wir es im vorigen Paragraphen für die Füllungsstäbe andeuteten.

Für den Stab X Fig. 28 ergeben sich die folgenden Werthe

$$M_x = \sum_0^{x+f} Pp - \frac{x+f}{l} \sum_0^l Pp + (x+f) \sum_{x+f}^l P,$$

ferner

$$\frac{dM_x}{dp} = \sum_0^{x+f} P - \frac{x+f}{l} \sum_0^l P,$$

oder mit Gebrauch der Abkürzung L_1 für $\sum_0^{x+f} P$, sowie der früheren Abkürzungen

$$\frac{dM_x}{dp} = L_1 - (x+f)\gamma,$$

oder auch

$$= L + f(\varphi - \gamma) - \gamma x.$$

Fortsetzung.

§ 45. Die bisherigen Entwickelungen sind für jedes irgendwie zusammengesetzte Lastensystem gültig, wenn wir auch bei Durchführung derselben stets die Belastung durch einen Eisenbahnzug in erster Linie ins Auge fassten. Ausser dieser Art der Belastung ist aber noch eine andere von hervorragender Bedeutung, das ist eine continuirliche, gleichförmig vertheilte Last. Für eine solche lässt sich die Berechnung des Trägers, namentlich wenn man ausschliesslich analytische Methoden zur Anwendung bringen will, viel leichter und einfacher durchführen. Wir werden uns jetzt mit der Aufsuchung der ungünstigsten Lastenstellung für diesen Fall beschäftigen.

Die Summenausdrücke der vorigen Paragraphen gehen hier in Integrale über, die sich ohne Weiteres auswerthen lassen, wenn man die Intensität der Belastung an jeder Stelle kennt. Der wichtige Unterschied der hier vorliegenden Aufgabe von der vorigen besteht aber darin, dass man die Gruppirung des zu Grunde zu legenden Lastensystems keineswegs zum Voraus kennt. Gegeben ist vielmehr nur die grösstmögliche Intensität der Belastung, die wir in der Folge mit q bezeichnen und als constant voraussetzen.

Die ungünstigste Belastungsart in Hinsicht auf den Stab Y in Fig. 28 ergibt sich leicht durch die Betrachtung der in § 43 gefundenen Ausdrücke

$$M_y' = \frac{z+l}{l} Pp ,$$

$$M_y'' = \frac{x+z}{f} P(x+f-p) - zP\frac{l-p}{l} ,$$

$$M_y''' = -zP\frac{l-p}{l} .$$

Aus denselben geht hervor, dass jede Last, die im ersten Lastengebiete angreift, ein positives, jede im dritten Lastengebiete ein negatives M_y hervorbringt. Setzt man den Ausdruck für M_y'' gleich Null und löst die so entstehende Gleichung

$$\frac{x+z}{f}(x+f-p) - z\frac{l-p}{l} = 0$$

nach p auf, so erhält man, wenn man das auf diese Weise ermittelte p mit (p) bezeichnet

$$(p) = \frac{lx(x+f+z)}{l(x+z)-fz} .$$

Ist die Abscisse einer Last im zweiten Lastengebiete kleiner als (p), so ist das durch sie hervorgerufene M_y'' positiv, anderen Falles negativ. Die Vertikale mit der Abscisse (p) ist demnach hinsichtlich des Stabes Y eine Belastungsscheide, d. h. jede Last, die links von dieser Vertikalen an-

greift, bringt ein positives, jede, die rechts angreift, ein negatives M_y hervor. — Bezüglich des Ausdruckes für (p) bemerken wir noch, dass sich leicht nachweisen lässt, dass (p) unter allen Umständen kleiner als $x+f$ und grösser als x ist, welches auch die Werthe der darin vorkommenden Grössen sein mögen.

Man sieht jetzt sofort ein, dass man den links von (p) gelegenen Theil des Trägers möglichst viel, d. h. mit q, den rechts gelegenen möglichst wenig, also gar nicht belasten muss, um den Maximalwerth von M_y zu erhalten. Ebenso nimmt M_y seinen Minimalwerth (im analytischen Sinne) an, wenn der rechts von der Belastungsscheide gelegene Trägertheil möglichst viel, der links gelegene gar nicht belastet wird.

Diese Verhältnisse ändern sich aber wesentlich, wenn z negativ wird. Liegt der Momentenpunkt des betrachteten Stabes zwischen den beiden Auflagervertikalen, z also zwischen Null und $-l$, so werden die drei Werthe M_y', M_y'' und M_y''' positiv und es folgt daraus, dass wir die Grenzspannungen solcher Stäbe erhalten, wenn wir den Träger entweder ganz mit q oder gar nicht belasten.

Zum Schlusse dieses Paragraphen leiten wir noch die Ausdrücke für die Grenzwerthe der Momente der Stäbe X, Y, Z in Fig. 28 ab, welche durch die hier vorausgesetzte Belastungsart hervorgerufen werden. Zu diesem Zwecke sind in den allgemeinen Ausdrücken für die Momente, die wir in den vorigen Paragraphen ableiteten, die Summen durch Integrale zu ersetzen. Man findet zunächst

$$M_y^{\max} = \int_0^x q\,dp\cdot p + \frac{x}{f}\int_x^{(p)} q\,dp\,(x+f-p) + z\left\{\frac{1}{l}\int_0^{(p)} q\,dp\cdot p - \frac{1}{f}\int_x^{(p)} q\,dp\,(p-x)\right\}.$$

Durch Ausführung der Integrationen und geeignete Reduction der gefundenen Ausdrücke ergibt sich

$$M_y^{\max} = \frac{q}{2}\left\{(p)^2\,\frac{l+z}{l} - \Big((p)-x\Big)^2\,\frac{x+z+f}{f}\right\}.$$

Setzt man noch den oben gefundenen Werth von (p) ein, so ergibt sich nach gehöriger Reduction der einfach gestaltete Werth

$$M_y^{\max} = \frac{qx^2}{2}\,\frac{(x+f+z)(l+z)}{l(x+z)-fz}.$$

In gleicher Weise ergibt sich der Minimalwerth (oder, wie man auch sagen kann, der maximale negative Werth) von M_y wie folgt

$$M_y^{\min} = \frac{x}{f}\int_{(p)}^{x+f} q\,dp\,(x+f-p) - z\left\{\int_{x+f}^{l} q\,dp - \frac{1}{l}\int_{(p)}^{l} q\,dp\cdot p + \frac{1}{f}\int_{(p)}^{x+f} q\,dp\,(p-x)\right\}.$$

Durch Ausführung der Integrationen wird daraus

$$M_y^{\min} = \frac{q}{2}\left\{\frac{(x+z)\,(x+f-(p))^2}{f} - \frac{z}{l}\,(l-(p))^2\right\},$$

und wenn man wieder für (p) den oben gefundenen Werth einsetzt

$$M_y^{\min} = -\frac{q}{2}\,\frac{z(x+z)\,(l-x-f)^2}{l(x+z)-fz}\,.$$

Für die Gurtungsstäbe gestalten sich die Ausdrücke für die Grenzwerthe der Momente noch erheblich einfacher. Der Momentenpunkt des Stabes Z hat in Fig. 28 die Abscisse x, man erhält daher

$$M_z^{\max} = \int_0^x q\,dp\cdot p - \frac{x}{l}\int_0^l q\,dp\cdot p + x\int_x^l q\,dp\,,$$

oder nach Ausführung der Integrationen

$$M_z^{\max} = q\,x\,\frac{l-x}{2}\,;$$

$M_z^{\min}$ ebenso wie $M_x^{\min}$ sind gleich Null.

Für $M_x^{\max}$ erhält man

$$M_x^{\max} = \int_0^{x+f} q\,dp\cdot p - \frac{x+f}{l}\int_0^l q\,p\,dp + (x+f)\int_{x+f}^l q\,dp$$

$$= q\,(x+f)\,\frac{l-x-f}{2}\,.$$

Die sämmtlichen hier aus den allgemeinen Formeln abgeleiteten Werthe für die Grenzmomente hätten sich allerdings durch eine directe Behandlung viel rascher ergeben. Wir begnügten uns deshalb damit, nur die Resultate anzugeben, und liessen die etwas umständlichen Umformungen, die zu denselben führten, fort.

Die Grenzspannungen der Stäbe, welche durch die mobile Last erzeugt werden, ergeben sich aus den Grenzmomenten leicht durch Division derselben mit den betreffenden Hebelarmen.

Schluss.

§ 46. Bei den bisherigen Untersuchungen wurde vorausgesetzt, dass der Momentenpunkt des betrachteten Stabes nicht ins Unendliche falle. Da aber die Momentenpunkte von Füllungsstäben nicht selten diese Lage haben, müssen wir diesen Fall ebenfalls in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen.

Man kann diesen Fall dadurch behandeln, dass man in den allgemeinen Formeln der vorigen Paragraphen $z = \infty$ setzt und berücksichtigt,

dass der Hebelarm des betreffenden Stabes ebenfalls unendlich gross wird, so dass der Quotient aus dem Momente und diesem Hebelarme eine endliche Grösse erlangt.

In § 43 fanden wir den allgemeinen Ausdruck für das Moment des Stabes Y in Fig. 28

$$M_y = \sum_0^x Pp + \frac{x}{f}\sum_x^{x+f} P(x+f-p)$$
$$- z\left\{\sum_{x+f}^{l} P - \frac{1}{l}\sum_0^{l} Pp + \frac{1}{f}\sum_x^{x+f} P(p-x)\right\}.$$

Die beiden ersten Glieder dieser Summe verschwinden gegen das dritte, wenn z unendlich gross wird. Die Spannung S_y des Stabes Y ergibt sich daher, wenn man mit h_y den Hebelarm dieses Stabes bezeichnet, zu

$$S_y = -\frac{z}{h_y}\left\{\sum_{x+f}^{l} P - \frac{1}{l}\sum_0^{l} Pp + \frac{1}{f}\sum_x^{x+f} P(p-x)\right\} = -\frac{z}{h_y} V,$$

da der Ausdruck in der Klammer die abscheerende Vertikalkraft V darstellt. (Vergl. § 43.)

Der Bruch $\frac{z}{h_y}$ geht aber in der Grenze, wenn Zähler und Nenner unendlich werden, in den Werth $\frac{1}{\sin\eta}$ über, wenn η den Neigungswinkel des Stabes Y gegen die Horizontale bezeichnet und die mitdurchschnittenen Gurtungsstäbe X und Z beide horizontal laufen. Man erhält also

$$S_y = -\frac{V}{\sin\eta}.$$

Dieses Resultat hätte man auch leicht direct mit Hülfe des Satzes finden können, dass die algebraische Summe der in beliebiger Richtung genommenen Componenten von den am linken Theile des durchschnittenen Trägers angreifenden äusseren und inneren Kräfte gleich Null sein muss.

Würden dagegen die mitdurchschnittenen Gurtungsstäbe X und Z ebenfalls eine Neigung gegen die Horizontale besitzen und mit letzterer den Winkel ξ bilden, so wird

$$S_y = V\frac{\cos\xi}{\sin(\xi-\eta)}.$$

Man erkennt aus diesen Formeln, dass die Stabspannung S_y der Vertikalkraft V direct proportional ist, und dass man daher die Grenzwerthe von V aufsuchen muss, um die von S_y zu erhalten.

Denken wir uns zunächst ein Lastensystem von bekannter Zusam-

mensetzung (einen Eisenbahnzug) gegeben, dessen ungünstigste Stellung zu ermitteln ist. Dann ist

$$\frac{dV}{dp} = -\frac{1}{l}\sum_{0}^{l} P + \frac{1}{f}\sum_{x}^{x+f} P \ ,$$

oder, mit Benützung der früheren Abkürzungen,

$$\frac{dV}{dp} = \varphi - \gamma \ .$$

Wir haben damit eine sehr einfache Regel für die Aufsuchung der Grenzwerthe gefunden.

Ferner ergeben sich die Werthe V', V'', V''', die der Einwirkung einer Einzellast im ersten, resp. zweiten oder dritten Lastengebiete entsprechen, wie folgt

$$V' = -\frac{1}{l} Pp \ ,$$

$$V'' = -\frac{1}{l} Pp + \frac{1}{f} P(p-x) \ ,$$

$$V''' = P\frac{l-p}{l} \ .$$

Man erkennt aus diesen Ausdrücken zunächst, dass sich V stetig ändert, wenn p sich stetig ändert, und zwar auch dann, wenn diese Aenderung das Ueberschreiten einer der Grenzen der Lastengebiete zur Folge hat. Ausserdem ergibt sich, dass jede Last im ersten Lastengebiete ein negatives, jede im dritten Lastengebiete ein positives V zur Folge hat. Setzt man ferner $V'' = 0$ und löst die so entstehende Gleichung nach p auf, so erhält man die Abscisse der Belastungsscheide hinsichtlich des betreffenden Stabes. Nennt man dieselbe wiederum (p), so wird

$$(p) = \frac{lx}{l-f} \ .$$

Auch dieser Werth hätte sich aus dem in § 45 für (p) gefundenen allgemeineren Ausdruck leicht dadurch ergeben, dass man in demselben $z = \infty$ gesetzt hätte.

Man findet jetzt für die Grenzwerthe der Vertikalkraft, die durch eine continuirliche gleichförmige Belastung erzeugt werden können, sehr leicht

$$V_{max} = \int_{x+f}^{l} q\,dp - \frac{1}{l}\int_{(p)}^{l} q\,dp \cdot p + \frac{1}{f}\int_{(p)}^{x+f} q\,dp\,(p-x)$$

$$= \frac{q}{2}\left\{ l - 2x - f + \frac{(p)^2}{l} - \frac{((p)-x)^2}{f} \right\} \ ,$$

oder durch Einsetzen des Werthes von (p)

$$V_{max} = q\frac{(l-x-f)^2}{2(l-f)} .$$

Ebenso wird

$$V_{min} = -\frac{1}{l}\int_0^{(p)} q\,dp\cdot p + \frac{1}{f}\int_x^{(p)} q\,dp\,(p-x)$$

$$= \frac{q}{2}\left\{\frac{((p)-x)^2}{f} - \frac{(p)^2}{l}\right\} .$$

Durch Einsetzen des Werthes von (p) wird

$$V_{min} = -\frac{q}{2}\frac{x^2}{l-f} .$$

Die soeben gefundenen Werthe von V_{max} und V_{min} hätten sich ebenfalls leicht aus den in § 45 entwickelten Ausdrücken für M_y^{min} resp. M_y^{max} ableiten lassen.

Berechnung einzelner Balkenbrücken-Systeme.

§ 47. Von den in der Praxis verwendeten Balkenbrücken-Systemen sind jene die wichtigsten, deren eine Gurtung eine horizontale Gerade bildet. Andere Systeme werden zwar auch verwendet, eignen sich aber wegen der Schwierigkeit der Befestigung der Fahrbahntafel weniger als jene.

Wird auch die zweite Gurtung in einer horizontalen geraden Linie angeordnet, so erhält man die einfachste Gestalt des Fachwerkbalkens, den Parallelträger. Derselbe wird zwar sehr häufig angewendet, soll aber hier nicht weiter behandelt werden. Die Aufgabe der Berechnung eines gegebenen Parallelträgers können wir durch die vorausgegangenen Untersuchungen bereits als vollständig erledigt betrachten, während die eingehenderen Untersuchungen über den theoretischen Materialverbrauch, die günstigste Anordnung der Füllungstheile und die günstigste Trägerhöhe zu specieller Natur sind, als dass sie in diesem Buche Platz finden könnten.

Wir werden aus den angegebenen Gründen uns hier nur mit der speciellen Berechnung solcher Balkenfachwerke beschäftigen, deren eine Gurtung geradlinig, deren andere polygonal gestaltet ist. Es ist für diese Behandlung ziemlich gleichgültig, ob die obere oder untere Gurtung die geradlinige ist. Da aber fast ausnahmslos in praxi die letztere Anordnung getroffen wird, wollen wir diese bei den folgenden Untersuchungen voraussetzen.

Den Linienzug der oberen Gurtung können wir unter allen Umständen als ein einer algebraischen Curve eingeschriebenes Polygon ansehen. Wir wollen diese Curve auf ein Coordinaten-System beziehen, dessen

Abscissenaxe mit der unteren Gurtung und dessen Ursprung mit dem linken Auflagerpunkte zusammenfällt. Die laufenden Coordinaten dieser Curve bezeichnen wir mit ξ und η. Wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, soll $\eta = 0$ für $\xi = 0$ und für $\xi = l$ sein. Ausserdem nehmen wir im Interesse einer einfacheren Behandlung an, dass die Knotenpunktsentfernungen der unteren Gurtung (das sind die Felderlängen) constant sein sollen. Bezüglich der Anordnung der Füllungsstäbe wollen wir zwei Fälle in Betracht ziehen, die in Figg. 29 und 30 dargestellt sind. In Fig. 29 hat die obere Gurtung einen Knotenpunkt mehr als die untere. Die mittleren Knotenpunkte haben in horizontaler Richtung gleichfalls eine constante Entfernung von einander, die gleich der Felderlänge ist, während die Auflagerknotenpunkte von den nächsten mittleren Knotenpunkten der oberen Gurtung um die halbe Felderweite in horizontaler Richtung Abstand haben. Die zweite Anordnung ist durch Fig. 30 hinlänglich erklärt.

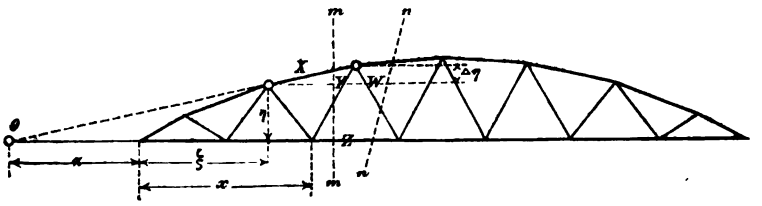


Fig. 29.

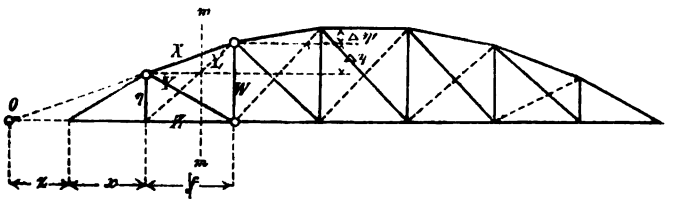


Fig. 30.

Um zu allgemeineren Resultaten gelangen zu können, nehmen wir als grösste mobile Last eine continuirliche, gleichförmig vertheilte Belastung an. Man ist zu dieser Annahme bei allen allgemeineren Untersuchungen genöthigt, da sich mit den sonst auftretenden Summenwerthen nicht gut weiter operiren lässt. Die Erfahrung zeigt übrigens, dass die unter dieser Voraussetzung sich ergebenden Grenzspannungen von jenen, die man bei Voraussetzung eines Eisenbahnzuges als grösster mobiler Belastung erhält, nur unwesentlich abweichen, wenn man für q einen geeigneten Werth wählt. — Es möge bei dieser Gelegenheit bemerkt werden, dass man bei Eisenbahnbrücken q um so kleiner annehmen kann, je grösser die Spannweite ist. Ausserdem empfiehlt es sich,

bei der Berechnung desselben Trägers zur Bestimmung der Spannungen der Füllungen einen anderen, und zwar etwas grösseren Werth für q anzunehmen, als für die Berechnung der Gurtungsspannungen. Im Mittel pflegt man $q = 4^{T}$ pro lfd. Mtr. Geleis zu setzen.

Auch die Belastung des Trägers durch sein eigenes Gewicht (permanente Belastung) setzen wir, wie es wohl überall geschieht, als gleichförmig über die Spannweite vertheilt voraus und bezeichnen die Intensität derselben mit r. Dabei führen wir die Berechnung so durch, als wenn die ganze permanente Last auf die Fahrbahntafel vertheilt wäre, vernachlässigen also namentlich die durch das eigene Gewicht der Stäbe hervorgerufene Biegung derselben.

Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich die Grenzspannungen der vom Schnitte mm in Fig. 29 getroffenen Stäbe, wenn man die in die Figur eingeschriebenen Bezeichnungen zu Grunde legt wie folgt.

Zunächst hat man für die Grenzmomente des Stabes X nach den Entwickelungen von § 45 und unter Berücksichtigung der hier zutreffenden Lage des Momentenpunktes die Ausdrücke

$$M_x^{q\,\max} = q\,\frac{x(l-x)}{2}\,,$$

$$M_x^{q\,\min} = 0\,,$$

$$M_x^{r} = r\,\frac{x(l-x)}{2}\,,$$

also

$$M_x^{\max} = (q+r)\,\frac{x(l-x)}{2}\,,$$

wenn man mit $M^{q\,\max}$ das durch die mobile Last q für sich hervorgerufene Maximalmoment bezeichnet und die anderen Bezeichnungen in derselben Weise deutet.

Man hat demnach

$$S_x^{\max} = \frac{\sqrt{f^2+\Delta\eta^2}}{f\left(\eta+\frac{\Delta\eta}{2}\right)}\,(q+r)\,\frac{x(l-x)}{2}\,.$$

Ebenso ergibt sich

$$M_z^{q\,\max} = \frac{q}{2}\left\{l\left(x+\frac{f}{2}\right) - x(x+f) - \frac{f^2}{2}\right\}\,.$$

M_z^{r} und $M_z^{\max}$ ergeben sich hieraus, wenn man an die Stelle von q im ersteren Falle r, im letzteren $r+q$ setzt.

Die Maximalspannung nimmt demzufolge den folgenden Ausdruck an:

$$S_z^{\max} = \frac{(q+r)\left\{l\left(x+\frac{f}{2}\right) - x\,(x+f) - \frac{f^2}{2}\right\}}{2(\eta+\Delta\eta)}\,.$$

Ferner wird, da

$$z = f\frac{\eta + \frac{\Delta\eta}{2}}{\Delta\eta} - x$$

ist, der in § 45 für $M_y^{q\max}$ gefundene Ausdruck zu

$$M_y^{q\max} = q\frac{x^2}{2}\frac{\left(\eta + \frac{3\Delta\eta}{2}\right)\left\{l - x + f\frac{\eta + \frac{\Delta\eta}{2}}{\Delta\eta}\right\}}{(l-f)\left(\eta + \frac{\Delta\eta}{2}\right) + x\Delta\eta}.$$

Ebenso wird

$$M_y^{q\min} = -q\frac{(l-x-f)^2}{2}\frac{\left(\eta + \frac{\Delta\eta}{2}\right)\left\{f\frac{\eta + \frac{\Delta\eta}{2}}{\Delta\eta} - x\right\}}{(l-f)\left(\eta + \frac{\Delta\eta}{2}\right) + x\Delta\eta}.$$

Für das durch die permanente Last hervorgerufene Moment von Y ergibt sich

$$M_y^r = \frac{r}{2}\left\{x(l-x) - f\frac{\eta + \frac{\Delta\eta}{2}}{\Delta\eta}(l - 2x - f)\right\}.$$

Der Hebelarm des Stabes Y in Fig. 29 wird durch den Ausdruck

$$f\frac{(\eta + \Delta\eta)\left(\eta + \frac{\Delta\eta}{2}\right)}{\Delta\eta\sqrt{(\eta + \Delta\eta)^2 + \frac{f^2}{4}}}$$

dargestellt. Mit Rücksicht hierauf findet man die Grenzspannungen des Stabes Y wie folgt

$$S_y^{\max} = \frac{\Delta\eta\sqrt{(\eta + \Delta\eta)^2 + \frac{f^2}{4}}}{f(\eta + \Delta\eta)\left(\eta + \frac{\Delta\eta}{2}\right)}\left\{q\frac{x^2}{2}\frac{\left(\eta + \frac{3\Delta\eta}{2}\right)\left(l - x + f\frac{\eta + \frac{\Delta\eta}{2}}{\Delta\eta}\right)}{(l-f)\left(\eta + \frac{\Delta\eta}{2}\right) + x\Delta\eta} + \right.$$

$$\left. + \frac{r}{2}\left(x(l-x) - f\frac{\eta + \frac{\Delta\eta}{2}}{\Delta\eta}(l - 2x - f)\right)\right\},$$

$$S_y^{\min} = \frac{\sqrt{(\eta + \Delta\eta)^2 + \frac{f^2}{4}}}{f(\eta + \Delta\eta)}\left\{-q\frac{(l-x-f)^2}{2}\frac{f\left(\eta + \frac{\Delta\eta}{2}\right) - x\Delta\eta}{(l-f)\left(\eta + \frac{\Delta\eta}{2}\right) + x\Delta\eta} + \right.$$

$$\left. + \frac{r}{2}\left(\frac{x(l-x)\Delta\eta}{\eta + \frac{\Delta\eta}{2}} - f(l - 2x - f)\right)\right\}.$$

Ausserdem denken wir uns den Schnitt nn durch den Träger gelegt und ermitteln die Grenzspannungen des von demselben getroffenen Stabes W.

Da für diesen Stab

$$z = f\frac{\eta' - \frac{\Delta\eta'}{2}}{\Delta\eta'} - x \,,$$

so wird

$$M_w^{q\,\max} = q\,\frac{x^2}{2}\,\frac{\left(\eta' + \frac{\Delta\eta'}{2}\right)\left(l - x + f\,\frac{\eta' - \frac{\Delta\eta'}{2}}{\Delta\eta'}\right)}{(l-f)\left(\eta' - \frac{\Delta\eta'}{2}\right) + x\,\Delta\eta'}$$

und

$$M_w^{q\,\min} = -\,q\,\frac{(l-x-f)^2}{2}\,\frac{\left(\eta' - \frac{\Delta\eta'}{2}\right)\left(f\,\frac{\eta' - \frac{\Delta\eta'}{2}}{\Delta\eta'} - x\right)}{(l-f)\left(\eta' - \frac{\Delta\eta'}{2}\right) + x\,\Delta\eta'}\,.$$

Ebenso wird

$$M_w^{\,r} = \frac{r}{2}\left\{x(l-x) - f\,\frac{\eta' - \frac{\Delta\eta'}{2}}{\Delta\eta'}\,(l - 2x - f)\right\}.$$

In diesen Ausdrücken wurde, um sie den für den Stab Y entwickelten conform zu gestalten, η' an die Stelle von $\eta + \Delta\eta$ gesetzt. Der Hebelarm des Stabes W in Fig. 29 wird durch den Ausdruck

$$f\,\frac{\eta'\left(\eta' + \frac{\Delta\eta'}{2}\right)}{\Delta\eta'\sqrt{\eta'^2 + \frac{f^2}{4}}}$$

dargestellt. In Folge dessen findet man für die Grenzspannungen des Stabes W die Werthe

$$S_w^{\max} = -\,\frac{\Delta\eta'\sqrt{\eta'^2 + \frac{f^2}{4}}}{f\eta'\left(\eta' + \frac{\Delta\eta'}{2}\right)}\left\{q\,\frac{x^2}{2}\,\frac{\left(\eta' + \frac{\Delta\eta'}{2}\right)\left(l - x + f\,\frac{\eta' - \frac{\Delta\eta'}{2}}{\Delta\eta'}\right)}{(l-f)\left(\eta' - \frac{\Delta\eta'}{2}\right) + x\,\Delta\eta'} + \right.$$

$$\left. + \frac{r}{2}\left[x(l-x) - f\,\frac{\eta' - \frac{\Delta\eta'}{2}}{\Delta\eta'}\,(l - 2x - f)\right]\right\},$$

$$S_w^{\min} = \frac{\Delta\eta' \sqrt{\eta'^2 + \frac{f^2}{4}}}{f\eta'\left(\eta' + \frac{\Delta\eta'}{2}\right)} \left\{ - q \frac{(l-x-f)^2}{2} \frac{\left(\eta' - \frac{\Delta\eta'}{2}\right)\left(f \frac{\eta' - \frac{\Delta\eta'}{2}}{\Delta\eta'} - x\right)}{(l-f)\left(\eta' - \frac{\Delta\eta'}{2}\right) + x\Delta\eta'} + \right.$$

$$\left. + \frac{r}{2}\left[x(l-x) - f\frac{\eta' - \frac{\Delta\eta'}{2}}{\Delta\eta'}(l - 2x - f)\right]\right\}.$$

Bezüglich des Sinnes der gefundenen Grenzspannungen ist noch das Folgende zu bemerken. Einem positiven Werthe von M_x entspricht eine Druckspannung des Stabes X. $S_x^{\max}$ ist daher ebenso wie $S_x^{\min}$, dessen Werth wir nicht besonders aufstellen, eine Druckspannung. Ebenso bedeutet $S_z^{\max}$ sowohl als $S_z^{\min}$ eine Zugspannung.

Ferner entspricht einem positiven Werthe von M_y eine Zugspannung, einem negativen Werthe eine Druckspannung des Stabes Y, während es sich mit dem Stabe W gerade umgekehrt verhält. Da die Vorzeichen der Ausdrücke für die Stabspannungen denen der Momente gleich gewählt wurden, bedeutet demnach ein positives S_y eine Zugspannung, ein positives S_w eine Druckspannung. Dabei sind für die in diesen Ausdrücken vorkommenden Wurzelzeichen immer nur die positiven Werthe anzunehmen. $S_y^{\max}$ bedeutet hiernach die grösste Zugspannung, wenn es positiv ist, die kleinste Druckspannung von Y, wenn es negativ ist; ebenso $S_y^{\min}$ die kleinste Zugspannung resp. grösste Druckspannung von Y. In gleicher Weise stellt $S_w^{\max}$ die grösste Druckspannung resp. kleinste Zugspannung, und $S_w^{\min}$ die kleinste Druckspannung resp. grösste Zugspannung des Stabes W vor.

Die in diesem § aufgestellten Formeln behalten übrigens, wie man leicht einsieht, ihre Gültigkeit auch für den Fall, dass der Träger eine Anfangshöhe besitzt.

Berechnung des Trägers Fig. 30.

§ 48. In Fig. 30 (pag. 78) sind ausser den von links nach rechts hin fallenden Diagonalen, die durch ausgezogene Linien dargestellt wurden, in der entgegengesetzten Richtung punktirte Linien angegeben. Dieselben deuten die zweite Lage an, welche von dem Diagonalstabe des betreffenden Faches eingenommen werden kann.

Wir werden zunächst die Ausdrücke für die Grenzspannungen der vom Schnitte mm getroffenen Stäbe X, Y, Z ermitteln unter der Voraussetzung, dass der Diagonalstab die durch die ausgezogene Linie angedeutete Richtung besitzt. Hierauf werden wir annehmen, der Diagonalstab falle mit der punktirt angegebenen Richtung zusammen, und ermitteln für diesen Fall die Grenzspannungen von $X\,Y'Z$, unter Y' die hier vor-

ausgesetzte Diagonale verstanden. Zuletzt werden wir noch für die verschiedenen möglichen Fälle die Grenzspannungen des Vertikalstabes W bestimmen.

Für den ersten Fall ergeben sich die Grenzspannungen der Gurtungsstäbe X und Z sehr einfach wie folgt:

$$S_x^{\max} = \frac{q+r}{2}\,\frac{(x+f)(l-x-f)\sqrt{f^2+\Delta\eta^2}}{f(\eta+\Delta\eta)}\,,$$

$$S_z^{\max} = \frac{q+r}{2}\,\frac{x(l-x)}{\eta}\,.$$

Die Minimalspannungen dieser Stäbe findet man, wenn man in den angegebenen Ausdrücken $q = 0$ setzt.

Ferner wird

$$M_y^{q\max} = \frac{qx^2}{2}\,\frac{(\eta+\Delta\eta)\left(l-x+f\frac{\eta}{\Delta\eta}\right)}{(l-f)\eta+x\Delta\eta}\,,$$

$$M_y^{q\min} = -\frac{q(l-x-f)^2}{2}\,\frac{\eta\left(f\frac{\eta}{\Delta\eta}-x\right)}{(l-f)\eta+x\Delta\eta}\,,$$

$$M_y^{r} = \frac{r}{2}\left\{x(l-x)-f\frac{\eta}{\Delta\eta}(l-2x-f)\right\}.$$

Da der Hebelarm von Y durch den Ausdruck

$$\frac{\eta(\eta+\Delta\eta)f}{\Delta\eta\sqrt{f^2+\Delta\eta^2}}$$

dargestellt wird, erhält man für die Grenzspannungen die Ausdrücke

$$S_y^{\max} = \frac{\Delta\eta\sqrt{f^2+\Delta\eta^2}}{\eta(\eta+\Delta\eta)f}\left\{q\frac{x^2}{2}\,\frac{(\eta+\Delta\eta)\left(l-x+f\frac{\eta}{\Delta\eta}\right)}{(l-f)\eta+x\Delta\eta}+\right.$$
$$\left.+\frac{r}{2}\left[x(l-x)-f\frac{\eta}{\Delta\eta}(l-2x-f)\right]\right\},$$

$$S_y^{\min} = \frac{\Delta\eta\sqrt{f^2+\Delta\eta^2}}{\eta(\eta+\Delta\eta)f}\left\{-q\frac{(l-x-f)^2}{2}\,\frac{\eta\left(f\frac{\eta}{\Delta\eta}-x\right)}{(l-f)\eta+x\Delta\eta}+\right.$$
$$\left.+\frac{r}{2}\left[x(l-x)-f\frac{\eta}{\Delta\eta}(l-2x-f)\right]\right\}.$$

Für den zweiten Fall findet man in gleicher Weise

$$S_x^{\max} = \frac{q+r}{2}\,\frac{x(l-x)\sqrt{f^2+\Delta\eta^2}}{\eta f}\,,$$

$$S_z^{\max} = \frac{q+r}{2}\,\frac{(x+f)(l-x-f)}{\eta+\Delta\eta}\,.$$

Die Momentenausdrücke für den Stab Y' sind den oben für Y angegebenen genau gleich. Da nun der Hebelarm des Stabes Y' durch den Ausdruck

$$\frac{\eta(\eta + \Delta\eta)f}{\Delta\eta\sqrt{f^2 + (\eta + \Delta\eta)^2}}$$

dargestellt wird, so ergibt sich

$$S_{y'}^{\max} = \frac{\Delta\eta\sqrt{f^2 + (\eta + \Delta\eta)^2}}{\eta(\eta + \Delta\eta)f}\left\{ q\,\frac{x^2}{2}\,\frac{(\eta + \Delta\eta)\left(l - x + f\frac{\eta}{\Delta\eta}\right)}{(l-f)\eta + x\Delta\eta} + \right.$$

$$\left. + \frac{r}{2}\left[x(l-x) - f\frac{\eta}{\Delta\eta}(l - 2x - f)\right]\right\},$$

$$S_{y'}^{\min} = \frac{\Delta\eta\sqrt{f^2 + (\eta + \Delta\eta)^2}}{\eta(\eta + \Delta\eta)f}\left\{ - q\,\frac{(l-x-f)^2}{2}\,\frac{\eta\left(f\frac{\eta}{\Delta\eta} - x\right)}{(l-f)\eta + x\Delta\eta} + \right.$$

$$\left. + \frac{r}{2}\left[x(l-x) - f\frac{\eta}{\Delta\eta}(l - 2x - f)\right]\right\}.$$

Bezüglich des Vertikalstabes W sind vier verschiedene Fälle der Anordnung der Diagonalen zu unterscheiden. Es können nämlich 1) die Diagonalen der beiden an W angrenzenden Felder der durch ausgezogene Linien angedeuteten Schaar angehören; 2) beide Diagonalen können der punktirt angegebenen Schaar angehören; 3) beide Diagonalen können vom oberen Knotenpunkte, und 4) beide können vom unteren Knotenpunkte des Vertikalstabes W ausgehen.

Im ersten Falle hat man sich einen Schnitt durch die Stäbe X, W und den unteren Gurtungsstab des nachfolgenden Feldes gelegt zu denken. Die Momente von W gestalten sich wie folgt:

$$M_w^{q\,\max} = \frac{q(x+f)^2}{2}\,\frac{(\eta + 2\Delta\eta)\left(l - x + f\frac{\eta}{\Delta\eta}\right)}{(l-f)\eta + (l+x)\Delta\eta},$$

$$M_w^{q\,\min} = -\,q\,\frac{(l - x - 2f)^2}{2}\,\frac{(\eta + \Delta\eta)\left(f\frac{\eta}{\Delta\eta} - x\right)}{(l-f)\eta + (l+x)\Delta\eta},$$

$$M_w^{r} = \frac{r}{2}\left\{x(l-x) + 2f^2 - f\frac{\eta}{\Delta\eta}(l - 2x - 3f)\right\}.$$

Da der Hebelarm des Stabes $W = z + x + f = f\,\frac{\eta + \Delta\eta}{\Delta\eta}$ ist, erhält man für die Grenzspannungen

$$S_w^{\max} = \frac{\Delta\eta}{f(\eta+\Delta\eta)}\left\{q\,\frac{(x+f)^2}{2}\,\frac{(\eta+2\Delta\eta)\left(l-x+f\,\frac{\eta}{\Delta\eta}\right)}{(l-f)\eta+(l+x)\Delta\eta}+\right.$$
$$\left.+\,\frac{r}{2}\left[x(l-x)+2f^2-f\,\frac{\eta}{\Delta\eta}\,(l-2x-3f)\right]\right\},$$

$$S_w^{\min} = \frac{\Delta\eta}{f(\eta+\Delta\eta)}\left\{-q\,\frac{(l-x-2f)^2}{2}\,\frac{(\eta+\Delta\eta)\left(f\,\frac{\eta}{\Delta\eta}-x\right)}{(l-f)\eta+(l+x)\Delta\eta}+\right.$$
$$\left.+\,\frac{r}{2}\left[x(l-x)+2f^2-f\,\frac{\eta}{\Delta\eta}\,(l-2x-3f)\right]\right\}.$$

Für den zweiten Fall findet man

$$M_w^{q\max} = q\,\frac{x^2}{2}\,\frac{\eta'\left(l-x+f\,\frac{\eta'-\Delta\eta'}{\Delta\eta'}\right)}{(l-f)(\eta'-\Delta\eta')+x\Delta\eta'},$$

$$M_w^{q\min} = -q\,\frac{(l-x-f)^2}{2}\,\frac{(\eta'-\Delta\eta')\left(f\,\frac{\eta'-\Delta\eta'}{\Delta\eta'}-x\right)}{(l-f)(\eta'-\Delta\eta')+x\Delta\eta'},$$

$$M_w^{r} = \frac{r}{2}\left\{x(l-x)-f\,\frac{\eta'-\Delta\eta'}{\Delta\eta'}\,(l-2x-f)\right\}.$$

Die Grenzspannungen werden daher

$$S_w^{\max} = \frac{\Delta\eta'}{f\eta'}\left\{q\,\frac{x^2}{2}\,\frac{\eta'\left(l-x+f\,\frac{\eta'-\Delta\eta'}{\Delta\eta'}\right)}{(l-f)(\eta'-\Delta\eta')+\Delta\eta'}+\right.$$
$$\left.+\,\frac{r}{2}\left[x(l-x)-f\,\frac{\eta'-\Delta\eta'}{\Delta\eta'}\,(l-2x-f)\right]\right\},$$

$$S_w^{\min} = \frac{\Delta\eta'}{f\eta'}\left\{-q\,\frac{(l-x-2f)^2}{2}\,\frac{(\eta'-\Delta\eta')\left(f\,\frac{\eta'-\Delta\eta'}{\Delta\eta'}-x\right)}{(l-f)(\eta'-\Delta\eta')+x\Delta\eta'}+\right.$$
$$\left.+\,\frac{r}{2}\left[x(l-x)-f\,\frac{\eta'-\Delta\eta'}{\Delta\eta'}\,(l-2x-f)\right]\right\}.$$

Im dritten Falle ergibt sich durch die Betrachtung des Gleichgewichtes des unteren Knotenpunktes, dass der Vertikalstab W nur gezogen werden kann und dass die Spannung desselben gleich dem auf diesen Knotenpunkt von der Fahrbahnconstruction ausgeübten Drucke ist. Die Grenzspannungen sind demnach gleich rf resp. $(r+q)f$.

Auch im vierten Falle lassen sich die Grenzspannungen von W sehr einfach angeben. Die Spannung von W muss nämlich mit den Spannungen der beiden Gurtungsstäbe im Gleichgewichte stehen. Diese drei Spannungen müssen sich also zu einem Kräftedreieck aneinander reihen lassen, dessen Winkel für alle Belastungsfälle constant sind. Alle diese

Kräftedreiecke, welche man für irgend welche Belastungsfälle construiren kann, sind demnach einander ähnlich, und es folgt, dass W gleichzeitig mit jenen Gurtungsstäben seine maximale resp. minimale Spannung erfährt. Daraus geht zunächst hervor, dass W immer gezogen ist und seine Maximalspannung bei totaler Belastung des Trägers erfährt.

Durch die Betrachtung der Aehnlichkeit des Kräftedreiecks mit einem Dreiecke, das man in der Figur durch Verlängern des Stabes um eine Felderlänge erhält, findet man ferner

$$S_w = S_x \frac{\Delta\eta - \Delta\eta'}{\sqrt{\Delta\eta^2 + f^2}}$$

und daher

$$S_w^{\max} = \frac{q+r}{2} \frac{(x+f)(l-x-f)(\Delta\eta - \Delta\eta')}{f(\eta + \Delta\eta)}.$$

$S_w^{\min}$ ergibt sich aus diesem Ausdrucke, wenn man $r = 0$ setzt.

Auch die Formeln dieses § behalten sämmtlich ihre Gültigkeit, wenn der Träger eine Anfangshöhe besitzt.

Fachwerk mit Gegen-Diagonalen.

§ 49. Wir dürfen hier als bekannt voraussetzen, dass man das in Fig. 30 (pag. 78) skizzirte Fachwerk häufig in der Form ausführt, dass in einigen oder auch in allen Fächern desselben beide Diagonalen als Stäbe vorkommen. Im Allgemeinen ist ein derartiges Fachwerk nicht mehr statisch bestimmt.

Dasselbe lässt sich aber in der That noch ähnlich wie ein statisch bestimmtes behandeln, wenn man beide Diagonalen schlaff, d. h. widerstandslos gegen eine Druckspannung construirt, und gewisse näherungsweise zutreffende Voraussetzungen bezüglich der Vertheilung der Spannungen macht.

Zunächst ist als erste Forderung zu stellen, dass das System keine Eigenspannungen besitze. Temperaturspannungen werden, wenn man nur eine gleichförmige Temperaturänderung voraussetzt, ohnedies nicht hervorgerufen, da einer Verlängerung des Trägers nichts im Wege steht. Der Träger bildet unter dem Einflusse solcher Temperaturänderungen ein ähnlich veränderliches System.

Ausserdem wird die Voraussetzung gemacht, dass von den beiden Diagonalen eines Faches immer nur eine gezogen, die andere dagegen spannungslos sei. Diese Voraussetzung ist allerdings keineswegs streng richtig, dass sie aber nahe genug zutrifft, ergibt sich aus der folgenden Ueberlegung. Auf die vier Knotenpunkte des Faches wirken gewisse Kräfte ein, die theils von den Stäben der benachbarten Fächer, theils von der Fahrbahnconstruction ausgeübt werden. An jedem Knotenpunkte

kann man sich diese Kräfte, die in Hinsicht auf das betrachtete Fach als äussere anzusehen sind, zu einer Resultirenden zusammengesetzt denken. Die so erhaltenen vier Kräfte müssen sich an dem von den beiden Gurtungsstäben, den beiden Vertikalen und den Diagonalen gebildeten Vierecke Gleichgewicht halten. Denkt man sich beide Diagonalen fort, so wäre es zwar möglich, dass die Anfangsstäbe des Vierecks sich nicht gegeneinander verschieben würden; das Viereck könnte sich im labilen Gleichgewichte befinden. Im Allgemeinen würde aber eine Verschiebung des Vierecks eintreten. Bei dieser Verschiebung müsste sich nothwendiger Weise die eine Diagonale verlängern, die andere verkürzen. Diese Verschiebung machen aber in Wirklichkeit die Diagonalstäbe unmöglich, und zwar würde jener, der sich verlängern sollte, in Zugspannung gerathen, während der andere seiner Widerstandslosigkeit gegen eine Druckspannung wegen ungespannt bliebe.

Durch diese Beweisführung wäre die Voraussetzung streng bewiesen, wenn nur die Diagonalstäbe, nicht auch die Umfangsstäbe des Vierecks elastisch wären. Die Elasticität dieser letzteren kann aber in der That veranlassen, dass sich gleichzeitig beide Diagonalen zu verlängern suchen, beide Stäbe also zugleich in Zugspannung gerathen. Indessen kommt in praxi die Elasticität der Umfangsstäbe weniger in Betracht, da sich die Einwirkung derselben immer zum grossen Theile aufhebt, und ausserdem die Spannungsdifferenzen der Gurtungsstäbe bei den verschiedenen hier in Frage kommenden Belastungsfällen verhältnissmässig von geringerer Bedeutung sind, während die Vertikalen an und für sich verhältnissmässig steifer construirt zu sein pflegen, als die übrigen Stäbe.

Adoptirt man die oben genannten Voraussetzungen, so lässt sich ein derartiger Träger genau wie ein statisch bestimmter behandeln. Um die Stabspannungen bei einem gegebenen Belastungsfalle zu ermitteln, lege man wie früher einen Schnitt *mm* durch den Träger (Fig. 30) und stelle das Moment der äusseren Kräfte für den Punkt *O* auf. Ist dasselbe positiv, so wird die punktirte, ist es negativ, so wird die ausgezogene Diagonale des durchschnittenen Faches in Wirksamkeit treten. Nachdem diese Frage entschieden ist, kann man die Spannungen der durchschnittenen Stäbe genau in der früheren Weise ermitteln.

Von besonderer Wichtigkeit ist auch hier wieder die Ermittlung derjenigen Lastenstellung, welche die grösste Spannung eines Stabes hervorruft, bezüglich die Bestimmung dieser Grenzspannungen selbst.

Am Einfachsten gestaltet sich diese Bestimmung für die Diagonalstäbe. Beide demselben Fache angehörigen Diagonalen haben nämlich denselben Momentenpunkt, und je nachdem in Bezug auf diesen das Moment der äusseren Kräfte positiv oder negativ ist, wird die eine oder die andere Diagonale gezogen, und zugleich sind diese Zugspannungen den Momenten direct proportional.

Daraus erkennt man, dass für die Diagonale Y der Ausdruck S_y^{min} in § 48, vorausgesetzt dass er negativ ist, die grösste Zugspannung angibt. Wäre dagegen S_y^{min} gleich Null oder positiv, so würde die Diagonale Y überhaupt nicht in Spannung gerathen. Ebenso gibt $S_{y'}^{max}$ in § 48 die grösste Spannung der Diagonale Y' an, vorausgesetzt, dass $S_{y'}^{max}$ positiv ist, indem andern Falles Y' überhaupt nicht gespannt würde.

Für die Gurtungs- und Vertikalstäbe ergibt sich die ungünstigste Lastenstellung durch die folgende Betrachtung.

Soll irgend eine Lastenstellung in Hinsicht auf einen gewissen Stab möglichst ungünstig sein, so darf die Hinzufügung einer neuen Last an irgend einer Stelle, die noch nicht vollständig belastet ist, keine Vermehrung der Spannung des betrachteten Stabes zur Folge haben. Entweder würde nun die Hinzufügung dieser neuen Last keinen Wechsel hinsichtlich der Functionirung der mit dem betrachteten Stabe in Verbindung stehenden Diagonalen zur Folge haben, und dann müsste es eine der in den vorigen §§ besprochenen ungünstigsten Stellungen sein; oder aber der Grenzwerth würde dadurch hervorgerufen werden, dass die Hinzufügung einer wenn auch noch so kleinen neuen Last, zur Folge hätte, dass anstatt einer der mit dem betrachteten Stabe in Verbindung stehenden Diagonalen deren Gegendiagonale in Spannung geriethe.

Der letztere Zustand setzt voraus, dass beide Diagonalen des betreffenden Faches nicht gespannt sind, dass also die Mittelkraft V aus den äusseren Kräften, die an der einen Seite des Trägers angreifen, durch den Momentenpunkt der betreffenden Diagonalen hindurchgehe.

Ist nun der betrachtete Stab ein Gurtungsstab, so ist es in diesem Grenzfalle, wie ein Blick auf die Figur (Fig. 30) lehrt, völlig gleichgültig, welchen der beiden Momentenpunkte, die dem Stabe entsprechen, jenachdem die eine oder die andere Diagonale in Spannung ist, man zur Bestimmung der Spannung des Stabes benützt. Daraus geht ohne Weiteres hervor, dass jeder Gurtungsstab auch hier seine Grenzspannungen nur bei totaler Belastung des Trägers erfährt. Man hat also zur Bestimmung der Grenzspannungen zunächst zu untersuchen, welche der Diagonalen bei totaler Belastung in Spannung ist, und jenachdem die im vorigen § für den ersten oder zweiten der dort unterschiedenen beiden Fälle gültigen Formeln für S_x^{max} resp. S_z^{max} anzuwenden.

Auch für die Vertikalstäbe lässt sich nachweisen, dass dem Falle, wenn die beiden Diagonalen eines der beiden dem betrachteten Vertikalstabe angrenzenden Fächer ohne Spannung sind, keine Grenzspannung dieses Vertikalstabes entspricht. Von den Diagonalen des anderen angrenzenden Faches müsste nämlich mindestens eine ohne Spannung sein. Es würden demnach entweder die beiden vom oberen oder die beiden vom unteren Knotenpunkte ausgehenden Diagonalen ohne Spannung sein,

also entweder der dritte oder vierte der in § 48 für die Berechnung der Vertikalstäbe unterschiedenen Fälle eintreten. In beiden Fällen kann aber eine Hinzufügung weiterer Lasten nur eine Vermehrung der Spannung der Vertikalstabes zur Folge haben. Daraus geht hervor, dass nur die bereits in § 48 aufgestellten Grenzwerthe für die Vertikalstäbe zu berücksichtigen sind.

Parabelträger.

§ 50. Die einfachste Annahme, die man bezüglich der Gestalt der oberen Gurtung des Trägers machen kann, ist die, dass die Ordinaten der Curve, auf welcher die Knotenpunkte liegen, ganze rationale Functionen zweiten Grades von den Abscissen seien. Die Curve selbst ist dann eine Parabel, und wir werden die weitere Voraussetzung machen, dass der so entstandene Parabelträger symmetrisch gebaut sei und keine Anfangshöhe besitze. Bezeichnet man dann die Höhe des Trägers in der Mitte mit b, so lautet die Gleichung der Parabel

$$\eta = 4b\left(\frac{\xi}{l} - \frac{\xi^2}{l^2}\right) .$$

Setzt man diesen Werth in die allgemeinen Formeln des § 47 ein, so erhält man für die Maximalspannungen der Gurtungsstäbe des in Fig. 29 (pag. 78) skizzirten Trägers die Ausdrücke

$$S_x^{\max} = \frac{r+q}{8b}\,\frac{x(l-x)}{x(l-x)-\frac{f^2}{4}}\,\sqrt{l^4 + 16b^2(l-2x)^2} ,$$

$$S_z^{\max} = \frac{(r+q)l^2}{8b}\left\{1 - \frac{f^2}{4\left(x+\frac{f}{2}\right)\left(l-x-\frac{f}{2}\right)}\right\} .$$

Die Maximalspannungen der unteren Gurtungsstäbe sind also in diesem Falle keineswegs constant.

Legt man dagegen den Träger Fig. 30 (pag. 78) zu Grunde, so wird

$$S_x^{\max} = \frac{r+q}{8b}\,\sqrt{l^4 + 16b^2(l-2x-f)^2} ,$$

$$S_z^{\max} = \frac{r+q}{8b}\,l^2 ,$$

$$S_y^{r} = 0 ,$$

$$S_{y'}^{r} = 0 ,$$

d. h. die Grenzspannungen der unteren Gurtungsstäbe sind constant, die Diagonalstäbe sind sämmtlich ohne Spannung, wenn der Träger gleichförmig belastet ist, und die Vertikalstäbe sind daher in diesem Falle mit

einer Zugspannung behaftet, die gleich dem Drucke ist, den die Fahrbahntafel auf den untern Knotenpunkt ausübt. Die Grenzspannungen der oberen Gurtungsstäbe nehmen nach der Mitte hin ab.

Nimmt man an, dass in jedem Fache Gegendiagonalen vorhanden sind, so ergeben sich die Maximal-Zugspannungen derselben wie folgt:

$$S_y^{\text{Zug max}} = \frac{qf}{8b(l+f)}\sqrt{l^4 + 16b^2(l-2x-f)^2}\,,$$

$$S_{y'}^{\text{Zug max}} = q\,\frac{\sqrt{f^2l^4 + 16b^2(x+f)^2(l-x-f)^2}}{8b(l+f)}\,.$$

Die Schwedler'schen Träger.

§ 51. Man kann sich die Aufgabe stellen, die Gestalt der obern Gurtung des Trägers Fig. 30 (pag. 78) so zu bestimmen, dass von den beiden Schaaren der Diagonalen nur eine Schaar erforderlich ist, so jedoch, dass diese Diagonalstäbe ebenfalls nur gezogen werden und die Minimal-Zug- resp. Maximal-Druckspannung derselben gerade gleich Null ist.

Nehmen wir an, dass die in Fig. 30 durch ausgezogene Linien angedeutete Schaar der Diagonalen allein zur Wirksamkeit gelangen soll, so haben wir zur Bestimmung der Gestalt der obern Gurtung den Ausdruck für $S_y^{\max}$ in § 48, der der Maximal-Druckspannung der Diagonalen entspricht, gleich Null zu setzen und die so entstehende Gleichung

$$\frac{q}{r}\,x^2\,\frac{\left(\frac{\eta}{\Delta\eta}+1\right)\left(l-x+f\frac{\eta}{\Delta\eta}\right)}{(l-f)\frac{\eta}{\Delta\eta}+x} = f\,\frac{\eta}{\Delta\eta}\,(l-2x-f) - x(l-x)$$

nach $\frac{\eta}{\Delta\eta}$ aufzulösen.

Nach gehöriger Reduction erhält man

$$\frac{\eta}{\Delta\eta} = \frac{x}{2f}\,\frac{\pm(l-f-x)\sqrt{\left(x\frac{q}{r}+l+f\right)^2+4\frac{q}{r}f(l-x)} - \left\{\frac{q}{r}x(l-x+f)+(l-f)(l-x-f)+2fx\right\}}{\frac{q}{r}x^2-(l-f)(l-2x-f)}\,.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung vermag man die Höhe jeder Vertikalen zu bestimmen, wenn die einer einzigen beliebig angenommen wurde.

Die Zweideutigkeit des Ausdruckes hat darin ihren Grund, dass die ungünstigste Stellung der mobilen Belastung selbst von der Lage des Momentenpunktes des Stabes Y abhängig ist, wie der in § 45 aufgestellte Werth von (p) zeigt.

Bestimmt man die Gestalt der obern Gurtung des Trägers nach der oben gefundenen Gleichung, so ist auf der ganzen Länge desselben nur die von links oben nach rechts unten fallende Schaar der Diagonalen in

Wirksamkeit. Der Träger erhält dann eine unsymmetrische Gestalt. Man führt daher, um dies zu vermeiden, die obere Gurtung nur auf der linken Trägerhälfte nach der oben gefundenen Formel aus, während man die obere Gurtung auf der rechten Trägerhälfte so bestimmt, dass nur die andere Diagonalenschaar in Wirksamkeit tritt. Man könnte diese Bestimmung dadurch ausführen, dass man die in § 48 gefundenen Ausdrücke für $S_y^{\min}$ oder $S_{y'}^{\min}$ gleich Null setzte und nach $\frac{\eta}{\Delta\eta}$ auflöste. Man kann sich aber diese Mühe durch die Bemerkung ersparen, dass die Gestalt der obern Gurtung auf der rechten Trägerhälfte derjenigen, welche nach Obigem für die linke Trägerhälfte gefunden wird, symmetrisch ist.

Die Bestimmung des Trägers nach der oben für $\frac{\eta}{\Delta\eta}$ aufgestellten genauen Formel erfordert zwar keine besonders umständlichen Zahlenrechnungen, dagegen ist allerdings die Ableitung derselben eine ziemlich mühsame. Die Mühe, die Formel selbst abzuleiten, dürfte sich aber unsers Erachtens Derjenige, welcher nach derselben construiren will, nicht ersparen, da es immer misslich ist, sich auf die Resultate einer mathematischen Entwicklung zu verlassen, ohne sie selbst geprüft zu haben.

Man kann sich die Aufgabe der Bestimmung der Gestalt des Schwedler'schen Trägers wesentlich dadurch erleichtern, dass man sich eine kleine Ungenauigkeit hinsichtlich der ungünstigsten Lastenstellung erlaubt. Am Einfachsten ist es dann, anzunehmen, dass die Grenzspannungen der Diagonalen durch Belastungen hervorgerufen werden, die von den Auflagern an bis zur Mitte des Faches reichen, dem die betreffende Diagonale angehört. Man führt dann anstatt des in § 45 bestimmten genaueren Werthes für die Abscisse (p) der Belastungsscheide den Näherungswerth $x + \frac{f}{2}$ in die Rechnung ein. Wir wollen die Rechnung auch für diesen Fall durchführen.

Nach § 45 ist

$$M_y^{q\max} = \frac{q}{2}\left\{(p)^2\,\frac{l+z}{l} - ((p)-x)^2\,\frac{x+z+f}{f}\right\},$$

während

$$M_y^r = \frac{r}{2}\left\{x(f+x) - z(l-2x-f)\right\}.$$

Durch Addition beider Ausdrücke ergibt sich der Maximalwerth von M_y. Setzt man denselben gleich Null und führt für (p) den Näherungswerth $x + \frac{f}{2}$ ein, so erhält man die Gleichung

$$\frac{q}{r}\left\{z\left(\frac{\left(x+\frac{f}{2}\right)^2}{l} - \frac{f}{4}\right) + x\left(x+\frac{3f}{4}\right)\right\} + x(f+x) - z(l-2x-f) = 0,$$

die sich leicht nach z auflösen lässt. Man erhält

$$z = x \frac{(x+f)\frac{r+q}{q} - \frac{f}{4}}{\frac{r}{q}(l-2x-f) - \frac{\left(x+\frac{f}{2}\right)^2}{l} + \frac{f}{4}} .$$

Das Verhältniss $\frac{\eta}{\Delta\eta}$ ergibt sich daraus sehr einfach, da $\frac{\eta}{\Delta\eta} = \frac{z+x}{f}$, daher

$$\frac{\eta}{\Delta\eta} = \frac{x}{f} \frac{\frac{r}{q}(l-x) + x + f - \frac{\left(x+\frac{f}{2}\right)^2}{l}}{\frac{r}{q}(l-2x-f) - \frac{\left(x+\frac{f}{2}\right)^2}{l} + \frac{f}{4}} .$$

Laissle und Schübler*) geben nach Schwedler für die Form der obern Gurtung die Gleichung

$$\eta = \frac{4cx^2}{l^2}(l-x)\frac{\frac{r}{q}+\frac{1}{2}}{\frac{r}{q}+\frac{x}{l}} , \quad \text{(worin } c \text{ eine Constante)} ,$$

aus der sich ergibt

$$\frac{\eta}{\Delta\eta} = \frac{x}{f} \frac{\frac{r}{q}(l-x) + x + f - \frac{x(x+f)}{l}}{\frac{r}{q}(l-2x-f) - \frac{x(x+f)}{l}} .$$

Diese Formel gibt von der oben angegebenen nur wenig abweichende Resultate.

Die Bestimmung der Function η, wenn $\frac{\eta}{\Delta\eta}$ als Function von x gegeben ist, erfordert im Allgemeinen die Integration einer Differential-Gleichung**).

---

*) Laissle und Schübler, Bau der Brückenträger, II. Theil, Stuttgart 1870.

**) Sei nämlich $\frac{\eta}{\Delta\eta} = \sigma$, wo σ irgend eine gegebene Function von x bedeutet, so hat man, unter φ die gesuchte Function für η verstanden,

$$\eta = \varphi(x) , \qquad \Delta\eta = \varphi(x+f) - \varphi(x) ,$$

demnach

$$\varphi(x)(1+\sigma) = \sigma\varphi(x+f) ,$$

$$\varphi(x)(1+\sigma) = \sigma\left\{\varphi(x) + f\varphi'(x) + \frac{f^2}{1.2}\varphi''(x) + \frac{f^3}{1.2.3}\varphi'''(x) + \cdots\cdots\right\} ,$$

wenn man $\varphi(x+f)$ nach dem Taylor'schen Satze entwickelt.

Diese Gleichung lässt sich kürzer schreiben

Bestimmung der Gestalt des Schwedler'schen Trägers, wenn ein Wagenzug als grösste mobile Belastung angenommen wird.

§ 52. Wir werden uns zunächst mit der Aufstellung der hierfür gültigen allgemeinen Sätze befassen und beziehen uns dabei auf die Entwickelungen des § 43.

Den dort für M_y entwickelten Ausdruck schreiben wir hier bequemer wie folgt:

$$M_y = \sum_0^x Pp - \frac{x}{l}\sum_0^l Pp + x\sum_x^l P - (x+z)\left\{\frac{1}{f}\sum_x^{x+f} Pp - \frac{1}{l}\sum_0^l Pp - \frac{x}{f}\sum_x^{x+f} P + \sum_{x+f}^l P\right\}.$$

In diesem Ausdrucke sollen nur die der mobilen Belastung angehörigen Lasten mit inbegriffen sein. Für M_y^r hat man hier wie früher

$$M_y^r = \frac{r}{2}\Big\{x(f+x) - z(l-2x-f)\Big\}.$$

Denken wir uns nun den Wagenzug in der für die gerade betrachtete Diagonale ungünstigsten Stellung, so muss die dem entsprechende Summe $M_y^{p\max} + M_y^r$ gleich Null gesetzt und nach z aufgelöst werden.

Man erhält dadurch

$$z = \frac{\sum_0^x Pp - \frac{x}{f}\sum_x^{x+f} Pp + \frac{x(x+f)}{f}\sum_x^{x+f} P + \frac{rx}{2}(x+f)}{\frac{1}{f}\sum_x^{x+f} Pp - \frac{1}{l}\sum_0^l Pp - \frac{x}{f}\sum_x^{x+f} P + \sum_{x+f}^l P + \frac{r}{2}(l-2x-f)}.$$

Dieser Ausdruck stellt zugleich ganz allgemein die Abscisse der Resultirenden V aller links von dem betrachteten Fache angreifenden äusseren Kräfte vor. Dabei ist nur zu beachten, dass wir z dann positiv rechneten, wenn es vom Coordinatenursprunge nach links hin lag. Der obere Gurtungsstab muss nun so angeordnet werden, dass die Abscisse des Momentenpunktes von Y mindestens gleich dem Maximalwerthe des obigen Ausdruckes wird. Um diesen Maximalwerth zu finden, differentiiren wir nach p und erhalten

---

$$\frac{1}{\sigma}\varphi(x) = f\varphi'(x) + \frac{f^2}{1.2}\varphi''(x) + \frac{f^3}{1.2.3}\varphi'''(x) + \cdots\cdots.$$

Sie stellt eine Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung dar, für die es, wie es schon die Natur der Aufgabe mit sich bringt, unendlich viele Lösungen gibt.

$$\frac{d(z)}{dp} = \frac{\left(\sum_{0}^{x} P - \frac{x}{f}\sum_{x}^{x+f} P\right) B - \left(\frac{1}{f}\sum_{x}^{x+f} P - \frac{1}{l}\sum_{0}^{l} P\right) A}{B^2},$$

worin A und B den Zähler resp. Nenner des oben für z aufgestellten Bruchwerthes bedeuten.

Andererseits ist nach § 43

$$\frac{dM_y}{dp} = \sum_{0}^{x} P - \frac{x}{f}\sum_{x}^{x+f} P - z\left\{\frac{1}{f}\sum_{x}^{x+f} P - \frac{1}{l}\sum_{0}^{l} P\right\}.$$

Durch Vergleichung beider Differential-Quotienten erkennt man zunächst, dass $\frac{d(z)}{dp}$ zu Null wird, wenn $\frac{dM_y}{dp}$ gleich Null ist und zugleich die Resultirende V durch O hindurchgeht. Ueberhaupt wird

$$\frac{d(z)}{dp} = \frac{\left(\frac{1}{f}\sum_{x}^{x+f} P - \frac{1}{l}\sum_{0}^{l} P\right)(Bz - A) + B\frac{dM_y}{dp}}{B^2}.$$

Das Vorzeichen von $\frac{d(z)}{dp}$ hängt nur von dem Zähler ab. Der Zähler geht aber für den Fall, dass V durch O hindurchgeht, über in $B\frac{dM_y}{dp}$. Ein Zeichenwechsel von $\frac{d(z)}{dp}$ wird demnach stattfinden entweder dann, wenn $\frac{dM_y}{dp}$ oder wenn B sein Zeichen wechselt. Man kann hiernach in jedem gegebenen Falle leicht bestimmen, nach welcher Richtung der Zug verrückt werden muss, damit (z) wachse.

Erleichtert wird diese Bestimmung noch durch die Bemerkung, dass der mit B bezeichnete Ausdruck nichts anderes darstellt, als die Grösse der früher mit V bezeichneten abscheerenden Vertikalkraft, wie man sich durch Vergleichung mit dem dafür in § 43 aufgestellten Ausdrucke überzeugt.

Schluss.

§ 53. Beschreibung des auf Tafel III benützten Verfahrens zur Bestimmung der obern Gurtung eines Schwedler'schen Trägers.

Das einfachste Verfahren, das man zur Bestimmung der Gestalt des Schwedler'schen Trägers benützen kann, ist die rein empirische Bestimmung von z als Function des Abstandes des vordersten Rades vom linken Auflager. Auf Tafel III ist in Fig. 6 diese Function für das vom Schnitte mm getroffene dritte Feld dargestellt. Um ganz genau zu verfahren, hätte man den Eisenbahnzug von einer Stellung zur andern immer derart verrücken müssen, dass in jeder Stellung irgend ein Rad

über einer Grenze der Lastengebiete stand. Da wir aber dadurch eine Construction erhalten hätten, die umständlicher als nothwendig gewesen wäre, geschah dies nur für jene Partie, in der z sich ohnehin einem Maximum nähert.

Die Ausführung der Construction wurde derart bewerkstelligt, dass in das Seilpolygon des Wagenzuges die Auflager-Vertikalen in der relativen Lage eingetragen wurden, die der gerade ins Auge gefassten Stellung des Zuges entsprach. Mit diesen Auflager-Vertikalen mussten jedesmal zugleich die das betrachtete Feld begrenzenden Vertikalen eingetragen werden. Auf letzteren wurden vom Seilpolygone an abwärts die Abschnitte abgetragen, die auf denselben vom Seilpolygone der eigenen Belastung und dessen Schlusslinie begrenzt wurden. Die Horizontalschübe beider Seilpolygone mussten, um dieses Aneinandertragen unmittelbar möglich zu machen, gleichgross angenommen werden. Verbindet man die hierdurch gefundenen Endpunkte durch eine Gerade und verlängert diese bis zur Schlusslinie, die der betrachteten Zugstellung entspricht, so gibt die Entfernung des Schnittpunktes dieser beiden Linien von der zugehörigen linken Auflager-Vertikalen unmittelbar das entsprechende (z) an.

Man erkennt sofort, dass, wenn die Figur soweit construirt ist, das entsprechende (z) auch für jedes andere Feld durch Ziehen weniger Linien bestimmt werden kann.

Hat man für jedes Fach die äusserste Lage des Punktes O bestimmt, so bedarf es nur noch einer Annahme über die Höhe des Trägers an irgend einer Stelle, um sofort die Linien der obern Gurtung angeben zu können.

Wenn auch das hier beschriebene directe Verfahren die peinlich genaue Ausführung einer ziemlich verwickelten Zeichnung erfordert, so steht doch die dafür aufzuwendende Mühe nicht im Verhältnisse zu den sonst für die Projectirung einer grössern Brücke erforderlichen Arbeiten. Jedenfalls ist das Verfahren ein so einfaches, dass Irrthümer oder Missverständnisse nahezu unmöglich sind, und die Curven z (Fig. 6) geben zugleich ein sehr übersichtliches Bild, nach dem man urtheilen kann, ob und inwieweit durch vielleicht etwas anders zusammengesetzte Lastensysteme ein weiteres Hinausrücken des Punktes O zu befürchten sei.

Bemerkt sei noch, dass eine Ungenauigkeit von z einen um so kleineren Einfluss auf die richtige Neigung des obern Gurtungsstabes ausübt, je grösser $x + z$ ist.

II. Berechnung der Balkenträger mit subsidiären Lasten.

Der Köpke'sche Träger.

§ 54. In dieser Nummer werden wir uns möglichst kurz fassen, da einerseits eine Ausdehnung der Behandlung auf allgemeinere und complicirtere Fälle bei der Neuheit dieser Constructionen und dem passiven Widerstande, dem dieselben bisher begegneten, für kaum irgend einen unserer Leser von Interesse sein dürfte, während andererseits bei der Behandlung des einfachsten Falles bezüglich der meisten Untersuchungen auf die vorige Nummer zurückverwiesen werden kann.

Unter der Bezeichnung »Köpke'scher Träger« wollen wir der Kürze halber einen Träger mit constantem Horizontalschub verstehen, der auf zwei Stützen aufgelagert ist und dessen untere Guttung eine die Auflagerpunkte verbindende gerade Linie bildet, während die obere Gurtung eine beliebige Gestalt annehmen kann. In dieser Form hat nämlich Herr Köpke das einzige bis jetzt bestehende Bauwerk dieser Art ausgeführt. Dass dort die Träger über vier Spannweiten aneinandergereiht und mit einer einzigen Spannvorrichtung versehen sind, ist für die theoretische Betrachtung ganz gleichgültig.

Man erhält die Stabspannungen jedes mit subsidiären Lasten behafteten Trägers, wenn man die algebraischen Summen bildet aus den Spangen, die hervorgerufen würden, wenn die subsidiären Lasten fehlten und den durch diese für sich hervorgerufenen Spannungen. Denkt man sich nun beim Köpke'schen Träger den Horizontalschub fort, so hat man einen Balkenträger der Art, wie wir sie in der vorigen Nummer eingehender behandelten. Man hat also zu den dort angeschriebenen Ausdrücken für die Maximalspannungen nur noch allenthalben die durch die subsidiäre Last hervorgerufenen Spannungen zuzufügen.

Die subsidiäre Last bringt aber beim Köpke'schen Träger, wie man leicht übersieht, nur in den unteren Gurtungsstäben Spannungen hervor, die sämmtlich Druckspannungen von der Grösse des Horizontalschubes sind. Denkt man sich nämlich Schnitte mm durch den Träger gelegt, so liegen die Momentenpunkte der von solchen Schnitten getroffenen Füllungsstäbe und Stäbe der oberen Gurtung auf der unteren Gurtung und der Horizontalschub hat demnach das Moment Null in Bezug auf dieselben.

Für die Füllungsstäbe und die Stäbe der oberen Gurtung gelten demnach genau die Entwickelungen der vorigen Nummer, während zu den dort gefundenen Werthen für die Spannungen der unteren Gurtungsstäbe überall die constante Druckspannung H zugefügt werden muss, wenn man mit diesem Buchstaben die Grösse der subsidiären Last bezeichnet.

Die Druckfläche des Köpke'schen Trägers.

§ 55. Denkt man sich durch den Träger den Schnitt mm gelegt (Fig. 31) und stellt in Bezug auf den Punkt N, dessen Abscisse $= x$, d. h. gleich der Abscisse des das durchschnittene Feld nach links hin begrenzenden unteren Knotenpunktes und dessen Ordinate gleich der willkürlichen Grösse y ist, das Moment M_{xy} der am linken Trägertheile angreifenden äusseren Kräfte auf, so erhält man

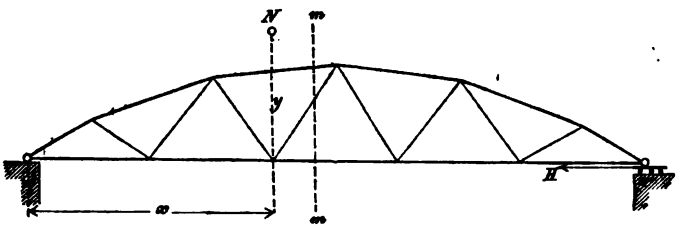


Fig. 31.

$$M_{xy} = x \sum_{x}^{l} P - \frac{x}{l} \sum_{x}^{l} Pp + \frac{l-x}{l} \sum_{0}^{x} Pp - H \cdot y \ .$$

Daraus erkennt man zunächst, dass jede Hinzufügung einer neuen Last zu den bereits vorhandenen eine Vergrösserung von M_{xy} zur Folge hat. Für jedes Lastensystem (und daher auch für jede Einzellast) ist nämlich $x \sum_{x}^{l} P$ unter allen Umständen grösser, als der in dem oben angeschriebenen Ausdrucke negativ auftretende Werth $\frac{x}{l} \sum_{x}^{l} Pp$.

Für die Annahme gleichförmig vertheilter continuirlicher Lasten erhält man demnach unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen die Grenzwerthe

$$M_{xy}^{\max} = (r + q) \frac{lx - x^2}{2} - H \cdot y \ ,$$

$$M_{xy}^{\min} = r \frac{lx - x^2}{2} - H \cdot y \ .$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke gleich Null und löst die so entstehenden Gleichungen nach y auf, so erhält man die Grenzwerthe, innerhalb deren sich die zur Abscisse x gehörige Ordinate der Drucklinie bewegen kann.

Nennt man die Ordinate der unteren Druckflächengrenze y' und jene der oberen y'', so wird

$$y' = \frac{r(lx - x^2)}{2H} ,$$

$$y'' = (r + q) \frac{lx - x^2}{2H} .$$

Die Grenzlinien sind also Parabeln mit senkrechter Axe.

Es erscheint daher die Parabelträgerform als die günstigste für die Ausführung Köpke'scher Träger, insofern man dabei nur auf möglichste Materialöconomie der unteren Gurtung Rücksicht nimmt. Beim Baue der Risaer Elbbrücke wurde auch diese Form zur Anwendung gebracht. Die untere Gurtung ist in Folge dessen ohne Spannung, wenn der Träger frei von mobiler Belastung ist.

III. Berechnung der statisch bestimmten Bogenträger auf zwei Stützpunkten.

A. Der gewöhnliche Bogenträger mit drei Gelenken.

Bestimmung der Auflagerdrücke.

§ 56. Auch bei der Berechnung dieser Träger beginnen wir damit, die Methoden zu erklären, nach denen man auf einfache und leichte Weise die Stabspannungen ermitteln kann, die einem bestimmten gegebenen Belastungsfalle entsprechen. — Zu diesem Zwecke ist es zunächst nothwendig, die Bestimmung der Auflagerreactionen zu erklären, die durch die angenommene Belastung hervorgerufen werden.

Diese kann durchgeführt werden

1) auf rechnerischem Wege,

durch Aufstellen der folgenden Gleichungen, in denen die vorkommenden Bezeichnungen ihre Erklärung durch Fig. 32 finden.

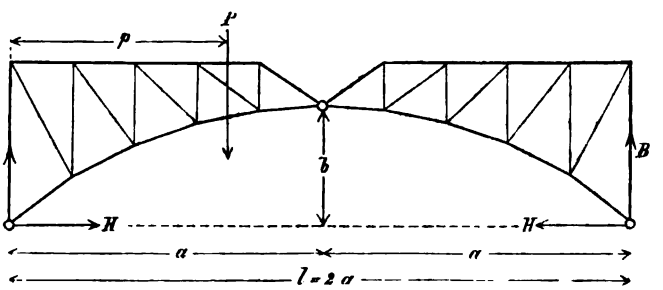


Fig. 32.

$$H - H_1 = 0 \ ,$$

$$\sum_0^l Pp - B \cdot l = 0 \ ,$$

$$A \cdot a - H \cdot b - \sum_0^a P(a - p) = 0 \ ,$$

$$A \cdot l - \sum_0^l P(l - p) = 0 \ .$$

Aus denselben geht hervor, dass sich die senkrechten Componenten der Auflagerreactionen genau so bestimmen, als wenn der Träger ein Balkenträger wäre. Für H, das nach der ersten Gleichung gleich H_1 ist, ergibt sich daraus der folgende Ausdruck:

$$H = \frac{a}{b} \sum_a^l P + \frac{1}{2b} \sum_0^a Pp - \frac{1}{2b} \sum_a^l Pp \ ,$$

$$= \frac{1}{2b} \left\{ \sum_0^a Pp + \sum_a^l P(l - p) \right\} .$$

Für $\frac{l}{2}$ wurde dabei der Kürze halber a geschrieben.

Ferner kann man die Auflagerdrücke

2) auf graphischem Wege

dadurch bestimmen, dass man zunächst für jede der beiden Trägerhälften die auf dieselben einwirkenden Lasten zu den Resultirenden R_1 resp. R_2 zusammensetzt. Dann werden zuerst die Auflagerdrücke bestimmt, die dem Falle entsprechen, dass nur R_1 auf den Träger wirkt, und hierauf jene, die der Belastung durch R_2 entsprechen. Nach dem in § 18 des ersten Capitels bewiesenen Satze erhält man alsdann die durch das ganze Lastensystem hervor-

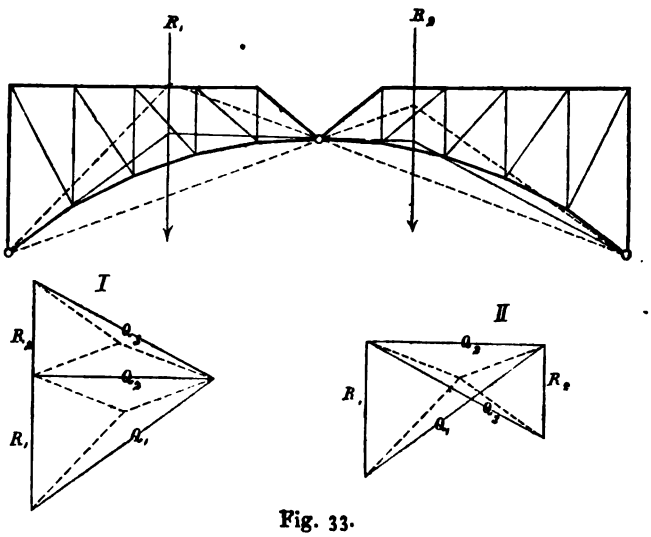


Fig. 33.

gerufenen Reactionen dadurch, dass man die gefundenen Partialreactionen zu Resultirenden vereinigt. In Fig. 33 ist diese Construction angedeutet. Man kann sich dabei entweder des Kräfteplanes I oder II bedienen. Die Auflagerreactionen sind in denselben mit Q_1 für das linke und Q_3 für das rechte Auflager bezeichnet. Ausserdem bezeichnet noch Q_2 den im Scheitelgelenke von den beiden Trägertheilen gegeneinander ausgeübten Druck.

Die Bestimmung der Resultirenden R_1 und R_2, die man zur Ausführung dieser Construction bedarf, kann bekanntlich sehr einfach mit Hülfe eines Seilpolygones erfolgen.

Schliesslich kann man die Aufgabe noch

3) auf einem anderen graphischen Wege

lösen, der eben so einfach als der vorige ist, soviel mir bekannt aber bisher noch nicht benützt wurde.

Man bestimmt zu diesem Zwecke, ebenso wie bei der vorigen Methode, die Resultirenden R_1 und R_2, zugleich aber auch die Resultirende R_3 aus diesen beiden. Die Lage der letzteren ergibt sich wie bekannt einfach durch Bestimmung des Schnittpunktes der beiden äussersten Seilspannungen des Seilpolygones, das man zur Ermittelung von R_1 und R_2 gebrauchte. Diese Operation verursacht daher keine nennenswerthe Mühe.

Hat man die drei Richtungen R_1, R_2 und R_3 in die Zeichnung des Trägers eingetragen, so ist die Bestimmung der Richtungslinien der Auflagerreactionen nur noch eine rein geometrische Aufgabe. Man soll nämlich Q_1, Q_2 und Q_3 (unter Q_3 den Scheiteldruck verstanden) so ziehen, dass sich Q_1 und Q_2 auf R_3, ferner Q_1 und Q_3 auf R_1, und Q_3 und Q_2 auf R_2 schneiden.

Denkt man sich nun zunächst eine beliebige Linie Q_2 durch das Gelenk B gezogen und ermittelt deren Schnittpunkte mit R_2 und R_3, so ergibt sich die zugehörige Linie Q_3 als Verbindungslinie des Scheitelgelenkes mit dem Schnittpunkte Q_2 R_2. Verbindet man hierauf die Schnittpunkte Q_2 R_3 und Q_3 R_1 durch eine Gerade, so stellt diese die zugehörige Linie Q_1 dar. Geht diese, wie es im Allgemeinen der Fall sein wird, nicht durch das Gelenk A, so ist damit bewiesen, dass die willkürlich für Q_2 angenommene Richtung falsch war. — Beschreibt nun die Q_2 einen Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt das Gelenk B ist, so beschreibt auch die entsprechende Linie Q_1 einen Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt sich leicht als Schnittpunkt zweier beliebiger Lagen bestimmen lässt. Es besteht nämlich der folgende Satz, den man (in etwas allgemeinerer Fassung) in Reye's Geo-

metrie der Lage*) erster Theil, pag. 51, oder in Staudt's Geometrie der Lage**), pag. 56, ausgesprochen und bewiesen findet:

»Wenn die drei Eckpunkte des Dreiseits Q_1 Q_2 Q_3 in den zu einander parallelen Graden R_1 R_2 R_3 sich bewegen, während zwei Seiten desselben Q_2 und Q_3 sich um feste Punkte (das Gelenk B und das Scheitelgelenk) drehen, so dreht sich auch die dritte Seite Q_1 um einen festen Punkt«.

In Fig. 34 ist die Construction dieses dort mit π bezeichneten Punktes ausgeführt. Man sieht leicht ein, dass er auf der Verbindungslinie des Scheitelgelenkes mit dem rechten Kämpfergelenke liegen muss.

Nachdem man so durch Ziehen weniger Linien den Punkt π erhalten hat, gibt die Verbindungslinie desselben mit dem linken Auflagerpunkte die Richtung von Q_1 an, und auch Q_2 und Q_3 ergeben sich ohne Weiteres. — Zur Bestimmung der Grösse der Auflagerreactionen bedarf es dann allerdings noch der Construction eines Kräftedreiecks.

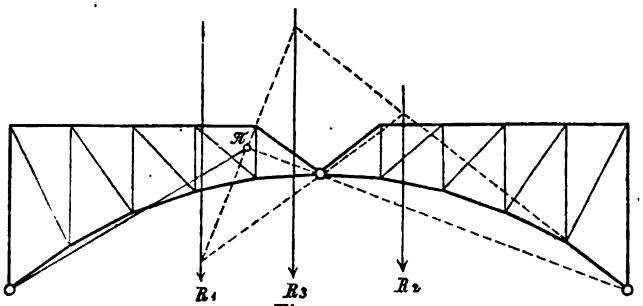


Fig. 34.

Anmerkung. Wir machen darauf aufmerksam, dass die hier erklärte Construction namentlich auch zur Lösung der Aufgabe, durch drei gegebene Punkte eines Gewölbes eine Drucklinie zu legen, benützt werden kann, und glauben behaupten zu dürfen, dass sie in diesem Falle der anderen Methode stets vorzuziehen sei.

Bestimmung der Stabspannungen.

§ 57. Zur Verbindung des Scheitelgelenkes mit den beiden Kämpfergelenken des dreigelenkigen Bogens verwendet man in praxi fast ausschliesslich statisch bestimmte Fachwerke von möglichst einfacher Gestalt, also solche, durch die man Schnitte legen kann, die nur drei Stäbe treffen. — Wenn die an den Knotenpunkten angreifenden äusseren Kräfte nach dem Vorigen sämmtlich bestimmt sind, kann man daher nach irgend einer der in §§ 36—39 beschriebenen Methoden die Stabspannungen ohne Schwierigkeit bestimmen.

Wir haben zu den dort gemachten Auseinandersetzungen hier kaum noch etwas hinzuzufügen, schliessen aber, um ein Beispiel für die Be-

*) Reye, Geometrie der Lage. Hannover 1866.
**) von Staudt, Geometrie der Lage. Nürnberg 1847.

rechnung nach der in § 30 eingehender erklärten zweiten graphischen Methode zu geben, die Tafel IV hier bei.

Wir nahmen an, dass ein Eisenbahnzug in der dort eingezeichneten Stellung sich auf der Brücke befinde, und stellten uns die Aufgabe, die dieser Belastung entsprechenden Spannungen der Stäbe X, Y, Z und W zu bestimmen.

Hierzu war es zunächst nothwendig, die Resultirende T aller links vom Schnitte mm angreifenden äusseren Kräfte aufzusuchen. Wir verbanden die Lasten durch ein Seilpolygon (das sich auch für die übrigen Stellungen des Zuges benützen lässt) und bestimmten mit Hülfe desselben nach der zweiten der im vorigen § angegebenen Methoden die Auflagerdrücke sowie die Resultirende Q der links vom Schnitte mm einwirkenden primären äusseren Kräfte. Durch Zusammensetzung dieser Kraft mit dem linken Auflagerdrucke ergab sich die oben genannte Resultirende T, die man den Mitteldruck für den Schnitt mm nennt*).

Nun müssen die drei Stabspannungen mit dem Mitteldrucke im Gleichgewichte stehen und lassen sich daher nach der früher beschriebenen Methode vermittelst des in Fig. 5, Tafel IV gezeichneten Kräftepolygons bestimmen.

Um die Spannung des Stabes W zu erhalten, legt man den Schnitt nn durch den Träger. Für diesen Schnitt erhält man denselben Mitteldruck wie für mm und kann daher das in Fig. 6, Tafel IV verzeichnete Kräftepolygon ebenfalls ohne Weiteres construiren. Man sieht übrigens leicht ein, dass es für die wirkliche Durchführung der Berechnung bequemer sein würde, die beiden Kräftepolygone in Fig. 5 und 6 zu einem einzigen zu vereinigen. Wir thaten dies dort nicht, um die Uebersichtlichkeit möglichst zu wahren. Aus demselben Grunde zogen wir es auch vor, die Bestimmung der Spannungen nur für eine Stellung des Wagenzuges durchzuführen.

Ermittelung der ungünstigsten Stellung des Wagenzuges.

§ 58. I. Für einen Stab der Gurtungen. Herr Prof. Schäffer in Darmstadt hat in der Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang 1875, eine ausführliche Untersuchung über dieses Thema veröffentlicht. Er schlug dort einen ähnlichen Weg ein, wie den auch schon von verschiedenen anderen Seiten zur Bestimmung der ungünstigsten Stellung eines gegebenen Lastensystemes für einen Balkenträger benützten (vergl. u. A. Löwe, Variable Belastung der Eisenbahnbrücken, München 1874), der auf der Zusammensetzung der in jedem Lastengebiete befindlichen Lasten

*) Leider hat sich auf Taf. IV ein Fehler eingeschlichen. T muss nämlich durch den Schnittpunkt des linken Auflagerdruckes mit Q anstatt durch den Schnittpunkt mit R_1 gehen.

zu einer Resultirenden beruht. Wir glauben aber hier, wie in Nr. I dieses Capitels, die Einführung von Summenausdrücken an Stelle der Resultirenden vorziehen zu müssen. Die Formeln werden dadurch zwar etwas länger, trotzdem aber durchsichtiger und eleganter. Namentlich lässt sich auch der Einfluss der Fahrbahnconstruction, die die Lasten nur an den Knotenpunkten überträgt, sofort in bequemer Weise berücksichtigen.

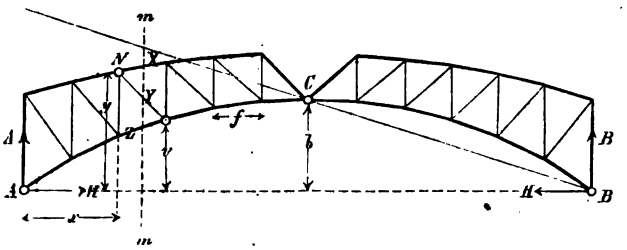


Fig. 35.

Wir denken uns in Fig. 35 den Schnitt mm gezogen und stellen zunächst für den Stab Z der unteren Gurtung, dessen Momentenpunkt N ist, das Moment der äusseren Kräfte auf. Man erhält

$$M_z = Ax - Hy - \sum_0^x P(x-p) ,$$

oder, durch Einsetzen der Werthe von A und H,

$$M_z = x\sum_x^l P - \frac{x}{l}\sum_x^l Pp + \frac{l-x}{l}\sum_0^x Pp - \frac{y}{2b}\left\{\sum_0^a Pp + \sum_a^l P(l-p)\right\}.$$

Durch Differentiation nach p erhält man

$$\frac{dM_z}{dp} = \sum_0^x P - \frac{x}{l}\sum_0^l P - \frac{y}{2b}\left[\sum_0^a P - \sum_a^l P\right]$$

$$= \sum_0^x P - \sum_0^a P\left(\frac{x}{l} + \frac{y}{2b}\right) + \sum_a^l P\left(\frac{y}{2b} - \frac{x}{l}\right) .$$

Um die Grenzwerthe von M_z zu erhalten, muss man den Zug so lange verschieben, bis ein Zeichenwechsel von $\frac{dM_z}{dp}$ stattfindet. Ist, wie es ausnahmslos der Fall sein wird, $y > \frac{2bx}{l}$, d. h. liegt der Punkt N über der Verbindungslinie des linken Kämpfergelenkes mit dem Scheitelgelenke und ist zugleich $\frac{l-x}{l} - \frac{y}{2b}$ positiv, d. h. liegt der Punkt N unter der Verbindungslinie des Scheitelgelenkes mit dem rechten Kämpfergelenke, so kann bei wachsendem p der obige Ausdruck nur dadurch vom Positiven ins Negative übergehen, dass $\sum_x^a P$ zunimmt. Bei der ungünstigsten Stellung steht also ein Rad über N.

Denkt man sich ferner zu dem bereits auf dem Träger befindlichen Lastensysteme eine neue Last hinzugefügt und bezeichnet das durch diese für sich hervorgerufene M_x mit M_x', wenn die Last zwischen o und x, mit M_x'', wenn sie zwischen x und a, und schliesslich mit M_x''', wenn sie zwischen a und l liegt, so ergibt sich durch Specialisirung des allgemeinen Werthes für M_x

$$M_x' = Pp\left(\frac{l-x}{l} - \frac{y}{2b}\right),$$

$$M_x'' = P\left(x - \frac{px}{l} - \frac{yp}{2b}\right),$$

$$M_x''' = P(l-p)\left(\frac{x}{l} - \frac{y}{2b}\right).$$

Nehmen wir auch jetzt wieder an, dass N zwischen den beiden Verbindungslinien vom Scheitelgelenke nach den Kämpfergelenken in der Weise eingeschlossen ist, wie es in der Figur der Fall ist, so wird M_x' unter allen Umständen positiv, da dann $y < 2b\,\frac{l-x}{l}$ ist. Dagegen ist M_x'' stets negativ, da in diesem Falle $y > 2b\,\frac{x}{l}$. M_x'' aber kann sowohl positiv als negativ sein, jenachdem nämlich die Abscisse der Last P kleiner oder grösser als der Ausdruck

$$\frac{x}{\frac{x}{l} + \frac{y}{2b}}$$

ist, den man für p erhält, wenn man M_x'' gleich Null setzt.

Die Abscisse dieser Belastungsscheide kann durch Construction dadurch erhalten werden, dass man in der Zeichnung die Punkte A und N verbindet und diese Linie bis zum Schnitte mit der Verbindungslinie des Scheitelgelenkes und des Gelenkes B verlängert. Der so erhaltene Schnittpunkt hat, wie man sich leicht überzeugt, die verlangte Abscisse.

Für den Stab X der oberen Gurtung gilt die soeben durchgeführte Untersuchung gleichfalls; man hat nur in den Formeln an die Stelle von x überall $x+f$ und an die Stelle von y die mit v bezeichnete Ordinate des Momentenpunktes von X zu setzen. Insbesondere wird

$$M_x = A(x+f) - H\cdot v - \sum_{o}^{x+f} P(p - x - f)$$

$$= (x+f)\sum_{x+f}^{l} P - \frac{x+f}{l}\sum_{x+f}^{l} Pp + \frac{l-x-f}{l}\sum_{o}^{x+f} Pp -$$

$$- \frac{v}{2b}\left\{\sum_{o}^{a} Pp + \sum_{a}^{l} P(l-p)\right\}.$$

Ferner

$$\frac{dM_x}{dp} = \sum_0^{x+f} P - \left(\frac{x+f}{l} + \frac{v}{2b}\right)\sum_0^{a} P + \left(\frac{v}{2b} - \frac{x+f}{l}\right)\sum_a^{l} P \,.$$

§ 59. II. Für einen Stab der Füllungstheile. Wir betrachten hier zunächst den Stab Y (Fig. 36), legen den Schnitt mm und

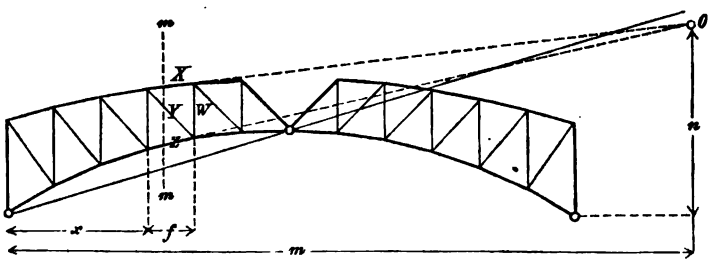


Fig. 36.

bezeichnen die Coordinaten des Momentenpunktes O mit m und n. In Bezug auf O stellen wir das Moment der am linken Trägertheile angreifenfenden äusseren Kräfte M_y auf. Man erhält

$$M_y = A \cdot m - H \cdot n - \sum_0^{x} P(m-p) - (m-x)\mathfrak{A} \,,$$

wenn man unter $\mathfrak{A}$ den Auflagerdruck versteht, den die Fahrbahnträger des durchschnittenen Faches auf ihr linkes Auflager ausüben. Setzt man für $\mathfrak{A}$ seinen Werth

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{f}\sum_x^{x+f} P(x+f-p)$$

und für A und H die früher angegebenen Werthe ein, so erhält man

$$M_y = m\sum_x^{l} P + \sum_0^{x} Pp - \frac{m}{l}\sum_0^{l} Pp - \frac{m-x}{f}\sum_x^{x+f} P(x+f-p) - \\ - \frac{n}{2b}\left[\sum_0^{a} Pp + \sum_a^{l} P(l-p)\right].$$

Durch Differentiation nach p erhält man

$$\frac{dM_y}{dp} = \sum_0^{x} P - \frac{m}{l}\sum_0^{l} P + \frac{m-x}{f}\sum_x^{x+f} P - \frac{n}{2b}\left[\sum_0^{a} P - \sum_a^{l} P\right].$$

Aus dem Vorzeichen des Ausdruckes kann man erkennen, in welcher Richtung der Zug zu verschieben ist, damit sich M_y vergrössere.

Etwas übersichtlicher schreibt sich der Ausdruck in der folgenden Form:

$$\frac{dM_y}{dp} = -\left(\frac{m}{l} + \frac{n}{2b}\right) \sum_{o}^{a} P + \left(\frac{n}{2b} - \frac{m}{l}\right) \sum_{a}^{l} P +$$

$$+ \sum_{o}^{x+f} P + \frac{m-x-f}{f} \sum_{x}^{x+f} P .$$

Nehmen wir an, dass $\frac{n}{2b} - \frac{m}{l}$ negativ ist, d. h. dass der Momentenpunkt O unterhalb der Verbindungslinie des Scheitelgelenkes mit dem linken Kämpfergelenke liegt, so kann ein Maximalwerth von M_y nur dann eintreten, wenn ein Rad entweder über dem linken Auflagerpunkte oder über dem Querschnitte $x + f$ steht. Dagegen kann ein Minimalwerth von M_y nur dann eintreten, wenn ein Rad entweder über dem linken Auflagerpunkte, oder über dem Querschnitte x, oder über dem Querschnitte a, oder über dem rechten Auflagerpunkte steht. Ob das Ueberschreiten des linken Auflagerpunktes von Seiten eines Rades eine Vergrösserung oder Verkleinerung von $\frac{dM_y}{dp}$ zur Folge hat, hängt davon ab, ob $1 - \left(\frac{m}{l} + \frac{n}{2b}\right)$ positiv oder negativ ist.

Bezeichnet man ferner den zwischen den Abscissen o und x liegenden Theil der Spannweite als erstes, den zwischen x und $x + f$ als zweites, den zwischen $x + f$ und a als drittes, und endlich den zwischen a und l liegenden Theil als viertes Lastengebiet, so erhält man für das durch irgend eine Last hervorgerufene Moment des Stabes Y die folgenden Werthe:

$$M_y' = Pp\left(\frac{l-m}{l} - \frac{n}{2b}\right) ,$$

$$M_y'' = Pp\left(\frac{m-x}{f} - \frac{m}{l} - \frac{n}{2b}\right) - Px\frac{m-x-f}{f} ,$$

$$M_y''' = mP - Pp\left(\frac{m}{l} + \frac{n}{2b}\right) ,$$

$$M_y'''' = Pl\left(\frac{m}{l} - \frac{n}{2b}\right) - Pp\left(\frac{m}{l} - \frac{n}{2b}\right) = P(l-p)\left(\frac{m}{l} - \frac{n}{2b}\right) .$$

Man erkennt daraus, dass im Allgemeinen zwei Belastungsscheiden vorhanden sind, und zwar eine, deren Abscisse wir mit p'' bezeichnen im zweiten, und eine andere, deren Abscisse p''' genannt werde, im dritten Lastengebiete. Man findet p'' und p''', wenn man die Ausdrücke für M_y'' resp. M_y''' gleich Null setzt und nach p auflöst.

Man erhält dadurch

$$p'' = x \frac{m - x - f}{m - x - f\left(\frac{m}{l} + \frac{n}{2b}\right)};$$

$$p''' = \frac{m}{\frac{m}{l} + \frac{n}{2b}}.$$

Beide Belastungsscheiden existiren aber in Wirklichkeit nur dann, wenn die für p'' und p''' nach diesen Formeln erhaltenen Werthe zwischen den Grenzen x und $x + f$, resp. zwischen $x + f$ und a liegen. Die Abscisse p''' erhält man durch Construction in bequemer Weise, indem man die Verbindungslinie des linken Kämpfergelenkes mit dem Punkte O zum Schnitte bringt mit der Verbindungslinie des rechten Kämpfergelenkes mit dem Scheitelgelenke. Die Vertikale durch den Schnittpunkt ist die Belastungsscheide.

Dass die Grenzen der Lastengebiete im Allgemeinen keine Belastungsscheiden sind, erkennt man sehr leicht, wenn man die Werthe von M_y' für $p = x$ mit M_y'' für $p = x$, ebenso M_y'' mit M_y''', beide für $p = x + f$ und M_y''' mit M_y'''', beide für $p = a$ mit einander vergleicht.

Für den Stab W gilt genau dieselbe Entwickelung. Nur die Coordinaten des Momentenpunktes O nehmen für W andere Werthe an als für Y. Da wir aber bezüglich der Lage von O im Vorhergehenden keine specielle Annahme machten, bedarf es auch keiner Aenderung in den angeschriebenen Formeln.

Anmerkung. Durch die Rücksicht auf eine leichtere constructive Ausführung des Trägers kann man veranlasst werden, ein Mittelfeld anzuordnen, das zur Hälfte dem einen, zur Hälfte dem anderen der beiden im Scheitelgelenke mit einander verbundenen Trägertheile angehört. In diesem Falle hat man ein Lastengebiet mehr zu unterscheiden. Schon bei der Bestimmung der Auflagerreactionen ist darauf Rücksicht zu nehmen. Da aber im Uebrigen die Behandlung in ganz ähnlicher Weise durchgeführt werden kann, sehen wir von einem näheren Eingehen auf diesen Fall hier ab.

Maximalmomente, die durch eine gleichförmig vertheilte continuirliche Belastung hervorgerufen werden.

§ 60. Man erhält die Grenzwerthe des Momentes M_z des Stabes Z in Fig. 35 (Seite 103), wenn man die in dem Ausdrucke für M_z in § 58 vorkommenden Summenzeichen durch Integrale ersetzt, deren Integrationsgrenzen entsprechend gewählt sind, während für P allenthalben $q\,dp$ gesetzt wird. Hat der Punkt N die schon in § 58 vorausgesetzte Lage, so nimmt M_z^q seinen Maximalwerth an, wenn der Träger zwischen den Abscissen o und $l \frac{x}{x + y\frac{l}{2b}}$ mit q belastet und auf der übrigen Strecke von

Lasten frei ist. Bezeichnet man vorübergehend die Abscisse dieser Belastungsscheide mit (p), so wird hiernach

$$M_z^{q\max} = x\int_x^{(p)} q\,dp - \frac{x}{l}\int_x^{(p)} pq\,dp + \frac{l-x}{l}\int_0^{x} pq\,dp - \frac{y}{2b}\int_0^{(p)} pq\,dp$$

$$= q\,\frac{x}{2}\left\{2(p) - x\right\} - (p)^2\left(\frac{qx}{2l} + \frac{qy}{4b}\right).$$

Nach Einsetzen des Werthes von (p) und geeigneter Reduction erhält man daraus

$$M_z^{q\max} = q\,\frac{\frac{x^2}{2}\,\frac{l-x}{l}\,\frac{y}{2b}}{\frac{x}{l}+\frac{y}{2b}}.$$

In gleicher Weise findet man

$$M_z^{q\min} = x\int_{(p)}^{l} q\,dp - \frac{x}{l}\int_{(p)}^{l} qp\,dp - \frac{y}{2b}\int_{(p)}^{a} qp\,dp - \frac{y}{2b}\int_a^l dp\cdot q(l-p),$$

woraus man nach Ausführung der Integrationen, Einführen des Werthes von (p) und gehöriger Reduction erhält

$$M_z^{q\min} = q\,\frac{lx}{2} - q\,\frac{l^2}{8b}\,y - \frac{qx^2}{2\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{2b}\right)}.$$

Für das durch die permanente Last r, die wir uns gleichförmig auf die Fahrbahn vertheilt denken, hervorgerufene Moment M_z^r findet man

$$M_z^r = rx\,\frac{l-x}{2} - r\,\frac{l^2}{8b}\,y.$$

Für die Grenzmomente erhält man daher

$$M_z^{\max} = r\,\frac{lx}{2} - (r+q)\,\frac{x^2}{2} - \frac{rl^2}{8b}\,y + \frac{qx^2}{2\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{2b}\right)},$$

$$M_z^{\min} = (r+q)\,\frac{lx}{2} - r\,\frac{x^2}{2} - (r+q)\,\frac{l^2}{8b}\,y - \frac{qx^2}{2\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{2b}\right)}.$$

Diese Momentenausdrücke gelten nicht nur für den Punkt N in Fig. 35, sondern für jeden in derselben Vertikalen mit N liegenden Punkt, sofern er die im Eingange dieser Entwickelung vorausgesetzten Grenzen nicht überschreitet. Setzt man den irgend einem beliebigen Belastungsfalle entsprechenden Ausdruck für M_z gleich Null, so erhält man die Gleichung der Drucklinie. Setzt man dagegen $M_z^{\max}$ und $M_z^{\min}$ gleich

Null und löst die so entstehenden Gleichungen nach y auf, so erhält man die Grenzen, innerhalb deren sich die Ordinate der Drucklinie bewegen muss, d. h. man erhält die Gleichungen der Druckflächengrenzen.

Bezeichnet man die Ordinaten der Druckflächengrenzen mit y' und y'', so erhält man nach Auflösen der Gleichungen $M_z^{max} = 0$ und $M_z^{min} = 0$ und nach gehöriger Reduction der gefundenen Ausdrücke

$$y' = \frac{bx}{l}\left\{1 - \frac{r+q}{r}\frac{2x}{l} \pm \sqrt{\left(\frac{r+q}{r}\frac{2x}{l} - 3\right)^2 + 8\frac{q}{r}}\right\},$$

$$y'' = \frac{bx}{l}\left\{1 - \frac{r}{r+q}\frac{2x}{l} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{r+q}\frac{2x}{l} - 3\right)^2 - 8\frac{q}{r+q}}\right\}.$$

Von den Wurzelvorzeichen haben nur die oberen Bedeutung. Man überzeugt sich davon leicht durch die Ueberlegung, dass anderen Falles die Werthe y' und y'' sämmtlich negativ würden, während doch die ganze Entwickelung nur für solche Punkte N gültig ist, die oberhalb der Verbindungslinie des linken Kämpfergelenkes mit dem Scheitelgelenke liegen.

Fortsetzung.

§ 61. Specielle Untersuchung über die günstigste Form der unteren Gurtung des Bogenträgers mit 3 Gelenken und horizontaler oberer Gurtung. Ein solcher Träger wird in der Regel so ausgeführt, dass die krummlinige untere Gurtung ganz innerhalb der Druckfläche liegt. (Vergl. Fig. 17 oder 18, Seite 47 und 48, in denen die Hälfte der Druckfläche für einen speciellen Fall dargestellt ist.) Namentlich ist dies auch der Fall, wenn die untere Gurtung parabolisch gekrümmt ist. Die obere Gurtung wird dann bei verschiedenen Stellungen der Last abwechselnd gezogen und gedrückt. Die Dimensionen der Stäbe derselben müssen daher den Wöhler'schen Gesetzen entsprechend bestimmt werden. Die Amerikaner addiren in diesem Falle die Absolutwerthe der grössten Zug- und der grössten Druckspannung und bestimmen die Querschnittsdimensionen dieser Summe proportional. Nach Professor Weyrauch*) steht dieses Verfahren in guter Uebereinstimmung mit den Wöhler'schen Gesetzen, und wir werden es daher hier ebenfalls adoptiren dürfen.

Man erhält die erwähnte Summe, wenn man die Differenz $M_x^{max} - M_x^{min}$ durch den Hebelarm des betrachteten Stabes dividirt. Für diese Differenz, die in der Folge mit G_x bezeichnet wird, erhält man

*) Weyrauch, Festigkeit- und Dimensionen-Berechnung der Eisen- und Stahl-Constructionen. Leipzig 1876.

$$G_x = -qx\,\frac{l+x}{2} + q\,\frac{l^2}{8b}\,y + \frac{qx^2}{\frac{x}{l}+\frac{y}{2b}},$$

worin x und y die Coordinaten eines beliebigen Knotenpunktes der unteren Gurtung bedeuten. Die Summe S der Absolutwerthe der Grenzspannungen jenes Stabes der oberen Gurtung, welcher den Punkt xy zum Momentenpunkte hat, wird demnach

$$S = -qx\,\frac{l+x}{2(h-y)} + q\,\frac{l^2}{8b}\cdot\frac{y}{h-y} + \frac{qx^2}{(h-y)\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{2b}\right)},$$

unter h die Höhe der oberen Gurtung über den Kämpfern verstanden.

Durch Differentiation von S partiell nach y erhält man hieraus

$$\frac{\partial S}{\partial y} = -qx\,\frac{l+x}{2(h-y)^2} + \frac{ql^2}{8b}\,\frac{h}{(h-y)^2} + qx^2\,\frac{\frac{x}{l}-\frac{h}{2b}+\frac{y}{b}}{(h-y)^2\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{2b}\right)^2}$$

$$= q\,\frac{\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{2b}\right)^2\left\{\frac{hl^2}{4}-bx(l+x)\right\}+\frac{2bx^3}{l}-hx^2+2yx^2}{2b(h-y)^2\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{2b}\right)^2}.$$

Das Vorzeichen dieses Bruches hängt nur vom Zähler ab, indem der Nenner stets positiv ist. Setzt man den Differentialquotienten gleich Null und löst die Gleichung $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$ nach y auf, so erhält man

$$\frac{y}{2b} = -\frac{x}{l} + \frac{-2bx^2 \pm x\sqrt{4b^2x^2+\left(\frac{2bx}{l}+h\right)\left(\frac{hl^2}{4}-bx(l+x)\right)}}{\frac{hl^2}{4}-bx(l+x)}.$$

Für den besonderen Fall, dass $h = b$ ist, wie dies bei den ausgeführten Constructionen näherungsweise zutrifft, erhält man demnach

$$\frac{y}{2b}+\frac{x}{l} = \frac{-2x^2 \pm \frac{x}{2}\sqrt{(l^2+4x^2)\left(1-\frac{2x}{l}\right)}}{\frac{l^2}{4}-lx-x^2},$$

oder in etwas bequemerer Form für die Zahlenrechnung

$$\frac{y}{2b} = \frac{x}{l}\left\{-1+\frac{-2\frac{x}{l} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\left(\frac{2x}{l}\right)^2\right)\left(1-\frac{2x}{l}\right)}}{\frac{1}{4}-\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}}\right\}.$$

Wir haben für verschiedene Werthe von $\frac{x}{l}$ die zugehörigen Werthe von $\frac{y}{2b}$ berechnet. Bezeichnet man die dem positiven Wurzelvorzeichen

entsprechenden Werthe von $\frac{y}{2b}$ mit η', die dem negativen Vorzeichen entsprechenden mit η'', so erhält man für

$\frac{x}{l}$ =	η' =	η'' =
0.00	0.0000	0.0000
0.05	+ 0.0454	— 0.1960
0.10	0.0829	— 0.5685
0.15	0.1117	— 1.5735
0.20	0.1426	— 16.5426
0.2071	0.1464	∞
0.25	0.1700	+ 3.3311
0.30	0.1854	+ 1.7760
0.35	0.2253	+ 1.2765
0.40	0.2628	+ 1.0016
0.45	0.3182	+ 0.7938
0.50	0.5000	+ 0.5000

Fig. 37 zeigt die graphische Darstellung von η' und η'' als Functionen von $\frac{x}{l}$. Um eine bequemere Figur zu erhalten, wurden aber die Ordinaten nur in $\frac{1}{10}$ Grösse aufgetragen.

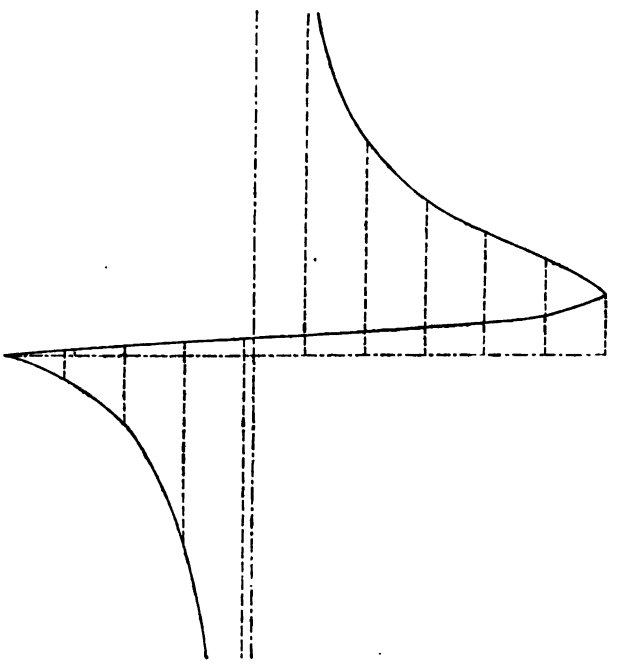


Fig. 37.

Die Beantwortung der Frage, ob den Werthen η' und η'' Maxima oder Minima der Function S entsprechen, gestaltet sich hier sehr einfach. Der Zähler des für $\frac{\partial S}{\partial y}$ aufgestellten Bruchwerthes ist nämlich eine ganze rationale Function zweiten Grades von y. Man kann daher das Vorzeichen desselben sofort angeben, wenn man bei sich gleich bleibendem x die beiden Wurzelwerthe und das Vorzeichen der Function für einen beliebigen dritten Werth von y kennt.

Setzt man in dem Zähler des Bruchwerthes für $\frac{\partial S}{\partial y}$ $y = 0$, so erhält man den Ausdruck

$$h x^2 \left\{ - \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \right\} .$$

Für die durch die Kämpferpunkte gezogene Gerade ist also $\frac{\partial S}{\partial y}$ immer negativ. Daraus kann man sofort schliessen, dass die Curve y' alle Punkte enthält, für die S ein Minimum wird, und die Curve y'' alle Punkte, für die S einen Maximalwerth annimmt.

Die letztgenannte Curve interessirt uns weniger, wohl aber die erstere. Verliefe dieselbe (was jedoch nicht der Fall ist) innerhalb der Druckfläche, so würde sie unmittelbar die vortheilhafteste Gestalt der unteren Gurtung des Trägers angeben. Vorläufig lehrt sie uns aber nur, dass es nicht vortheilhaft ist, die untere Gurtung des Trägers innerhalb der Druckfläche anzuordnen. Jedenfalls würde es vortheilhafter sein, sie dem Verlaufe der unteren Druckflächengrenze anzuschliessen.

In den vorigen Aussprüchen hat man sich hinter dem Worte »vortheilhaft« jedesmal hinzugefügt zu denken: »hinsichtlich der Material-Oeconomie der oberen Gurtung«. Man sieht aber leicht ein, dass dieselben auch hinsichtlich des Materialverbrauches der unteren Gurtung zutreffen. Durch ein Tieferrücken der unteren Gurtung werden nämlich die Hebelarme der Stäbe dieser Gurtung vergrössert, während die Momente der Stäbe sich nicht verändern. Die Spannungen werden also sämmtlich verringert, und zugleich nimmt die Gesammtlänge der Gurtung ab.

Dass diese Anordnung, nämlich das Zusammenfallen der unteren Gurtung mit der unteren Druckflächengrenze, auch für die Füllungsstäbe vortheilhafter sei, lässt sich nicht so unmittelbar nachweisen. Es ist aber sehr wahrscheinlich, dass wenigstens kein Mehraufwand durch dieselbe bedingt wird. Die Momente der Füllungsstäbe auf der linken Trägerhälfte sind nämlich hier vorzugsweise positiv, während beispielsweise bei parabolisch gestalteter unterer Gurtung die Diagonalstäbe gleich grosse Maximalzug- und Maximaldruckspannungen erfahren. Bei der letztgenannten Anordnung müssen also die Diagonalen auf Schwingungsfestigkeit resp. auf Zerknicken berechnet werden, während bei der ersteren die Diagonalen vorzugsweise gezogen sind und nur verhältnissmässig kleine Druckspannungen erfahren. Aehnliches lässt sich auch bezüglich der Vertikalen sagen.

In Anbetracht dieser Resultate kann man daher behaupten:

»Es ist im Allgemeinen vortheilhafter, die untere Gurtung des Bogenträgers mit drei Gelenken und

gerader oberer Gurtung nach der unteren Druckflächengrenze zu gestalten, als sie, wie es gewöhnlich geschieht, parabolisch anzuordnen«.

Der Grund, welcher für die parabolische Form der unteren Gurtung gewöhnlich angeführt wird, dass die Eigenlast des Trägers, ausser in der unteren Gurtung selbst, keine Spannungen in den übrigen Stäben hervorrufe, ist wohl einer kreisförmigen Gestaltung gegenüber zutreffend, nicht aber der soeben als vortheilhafter anerkannten gegenüber. Man erkennt nämlich aus dem Ausdrucke für G_x einerseits, dass überhaupt für sämmtliche Trägerformen, deren untere Gurtung in die Druckfläche fällt, die Dimensionen der oberen Gurtung von der permanenten Last vollständig unabhängig sind. Andererseits hoben wir es bereits oben als einen Vorzug der hier vorgeschlagenen Form hervor, dass die Diagonalen schon in Folge der permanenten Last Zugspannungen erfahren, wodurch die grössten Druckspannungen derselben entsprechend herabgemindert werden; während auch für die Vertikalstäbe Aehnliches gilt.

Um die vorgeschlagene Gestaltung des Trägers als die überhaupt beste nachzuweisen, würde es noch erübrigen, sie mit einer Anordnung zu vergleichen, bei welcher die untere Gurtung noch unterhalb der unteren Druckflächengrenze liegt. Eine solche Anordnung kann aber in der That der ersten noch vorzuziehen sein. Allerdings werden sich bei einem Abrücken der unteren Gurtung von der unteren Druckflächengrenze nach abwärts die Grenzspannungen der oberen Gurtungsstäbe erheblicher vermehren, als gleichzeitig die Grenzspannungen der unteren Gurtung abnehmen. Dagegen dürfte sich zugleich der Materialverbrauch für die Füllungsstäbe erheblich vermindern.

Als äusserster Grenzfall, der hier in Betracht kommen kann, ist wohl der anzusehen, dass die untere Gurtung geradlinig ist, wie in Fig. 38 skizzirt wurde. Die Diagonalen sind hier nur gezogen, können also als flache Bänder construirt werden, während die Vertikalen ebenfalls nur Druckspannungen auszuhalten haben. Wenn die Pfeilhöhe des Trägers gering ist, weicht auch die untere Gurtung nur unbedeutend von der Druckflächengrenze ab.

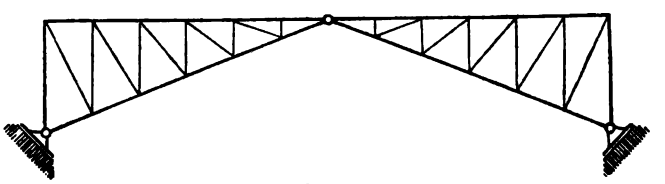


Fig. 38.

Ausserdem hat dieser Träger den Vorzug, dass jede »krumme« Arbeit vermieden ist. Wir glauben ihn daher als ein durchaus praktisches System empfehlen zu dürfen.

Schluss.

§ 62. Das Schwedler'sche Gestaltungsprincip übertragen auf den Bogenträger mit drei Charnieren und gerader obererer Gurtung. Das Princip, welches Herr Schwedler für die Gestaltung der Balkenträger mit gerader unterer Gurtung aufstellte, nämlich die obere Gurtung so zu bestimmen, dass nur einfache, schlaff construirte Diagonalen erforderlich sind, lässt sich auch auf die hier in Rede stehenden Träger anwenden. Bei den Balkenträgern liegt die Schwedler'sche Gurtung bekanntlich zwischen der parabolischen und der geraden. Dasselbe trifft auch hier zu.

Das Verfahren zur Bestimmung der Gestalt der unteren Gurtung nach dem Schwedler'schen Princip ist im Wesentlichen sehr einfach. Man muss sich einen Schnitt *mm* durch ein beliebiges Fach gelegt denken und darauf die Stellung der Last ermitteln, welche bewirkt, dass der Schnittpunkt des Mitteldruckes für den Schnitt *mm* mit der Horizontalen der oberen Gurtung möglichst weit nach der einen oder anderen Seite hinausrückt. Die äusserste Grenzlage dieses Schnittpunktes hat man darauf als Momentenpunkt der Diagonale des betreffenden Faches anzunehmen. Nachdem in dieser Weise für die Diagonale jedes Faches der Momentenpunkt bestimmt ist, zieht man vom Kämpfergelenke aus nach dem Momentenpunkte der Diagonale des ersten Faches den ersten Stab der unteren Gurtung; von dessen Endpunkte aus den zweiten Stab dieser Gurtung nach dem Momentenpunkte der Diagonale des zweiten Faches u. s. f. Den letzten Stab vor dem Scheitelgelenke muss man natürlich nach diesem selbst ziehen.

Es würde ohne Zweifel von Interesse sein, die bezügliche Bestimmung unter der Annahme einer stetig vertheilten mobilen Belastung durchzuführen und die Gestalt des Trägers für einen speciellen Fall zu verzeichnen. Der Verfasser glaubt aber für den Augenblick darauf verzichten zu müssen, weil eine bis in die Einzelheiten eingehende Behandlung jeder hier angedeuteten Idee den Umfang dieser Abtheilung ungebührlich erweitern und die Fertigstellung derselben allzusehr verzögern würde. Uebrigens würde die angedeutete Behandlung für die Mehrzahl der Fälle auch nur einen mehr theoretischen Werth haben, da man bei einer praktischen Ausführung wohl vorziehen würde oder vorziehen müsste, die Gestalt der unteren Gurtung unter Berücksichtigung von Einzellasten zu bestimmen. — Ich behalte mir indessen vor, bei einer anderen Gelegenheit auf diese Frage zurückzukommen.

B. Berechnung der Bogenträger mit zwei eigentlichen Kämpfergelenken und einem imaginären Mittelgelenke.

1. Anordnung des Trägers nach Fig. 39.

§ 63. Bestimmung der Auflagerdrücke. Für die Aufstellung der Ausdrücke für die Auflagerreactionen sind drei Lastengebiete zu unterscheiden, die zwischen den Abscissen o und m, m und n und zwischen n und l liegen.

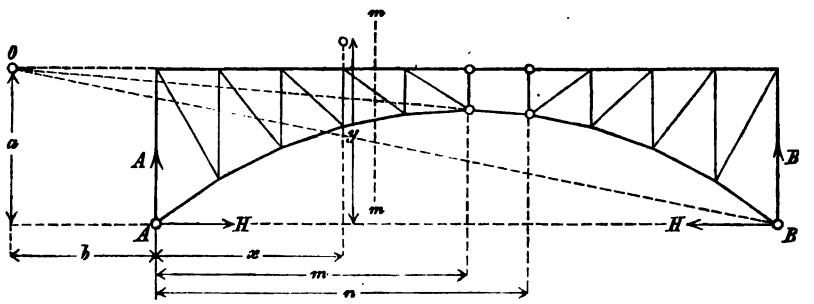


Fig. 39.

Für die Bestimmung der senkrechten Componenten A und B der Auflagerdrücke ist es gleichgültig, welchem dieser Lastengebiete die Last P angehört. Es ist immer

$$A = P\,\frac{l-p}{l} \quad \text{und} \quad B = P\,\frac{p}{l}\,.$$

Dagegen wird (unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise)

$$H_{,} = B\,\frac{b+l}{a} = P_{,}\,p\,\frac{b+l}{al}\,,$$

$$H_{,,,} = -\,A\,\frac{b}{a} = -\,P_{,,,}\,b\,\frac{l-p}{al}\,.$$

Die Lasten $P_{,,,}$ bringen nämlich einen Horizontalzug hervor, der negativ zu rechnen ist.

Die Lasten $P_{,,}$ wirken zunächst auf die Fahrbahnconstruction ein, die ihrerseits auf die links und rechts gelegenen Trägerhälften Auflagerdrücke ausüben. Nennen wir vorübergehend den von $P_{,,}$ auf die linke Trägerhälfte hervorgebrachten Auflagerdruck $\mathfrak{A}$, so wird

$$H_{,,} = \mathfrak{A}\cdot m\,\frac{b+l}{al} - (P_{,,} - \mathfrak{A})\,b\,\frac{l-n}{al}\,,$$

während andererseits

$$\mathfrak{A} = P_{''} \cdot \frac{n-p}{n-m} .$$

Man erhält daher

$$H_{''} = \frac{P_{''}}{a}\left\{\frac{m(n+b)-p(m+b)}{n-m} + p\,\frac{b}{l}\right\} .$$

Für ein aus Einzellasten zusammengesetztes Lastensystem sind aus diesen Ausdrücken die Summen zu bilden, für continuirliche Lasten die entsprechenden Integrale zu nehmen.

§ 64. Aufstellen der Momentenausdrücke. Hier ist ein Lastengebiet mehr zu unterscheiden. Es zerfällt nämlich das vorher als erstes gerechnete Lastengebiet zwischen o und m in die beiden Gebiete zwischen o und x und zwischen x und m. Für den Punkt, dessen Coordinaten x und y sind, wird

$$M_{xy}' = P_{,}\,\frac{p}{l}\left(l - x - y\,\frac{b+l}{a}\right) .$$

Dieser Ausdruck ist für jedes p, entweder positiv oder negativ, jenachdem der Momentenpunkt unterhalb oder oberhalb der Verbindungslinie OB liegt. Eine Belastungsscheide existirt also im ersten Lastengebiete nicht.

Ferner wird

$$M_{xy}'' = P_{''}\,x - P_{''}\,p\left(\frac{x}{l} + y\,\frac{b+l}{a\,l}\right) .$$

Für $M_{xy}'' = 0$ wird

$$p'' = \frac{a\,l\,x}{a\,x + y(b+l)} .$$

Es existirt also eine Belastungsscheide im zweiten Lastengebiete, deren Abscisse gleich p'' ist, wenn der Momentenpunkt unterhalb OB liegt, anderen Falles nicht.

Für den dritten Fall erhält man

$$M_{xy}''' = P_{'''}\left(x - y\,\frac{m(n+b)}{a(n-m)}\right) + P_{'''}\,p\left(\frac{y(m+b)}{a(n-m)} - \frac{y\,b}{a\,l} - \frac{x}{l}\right) .$$

Es existirt immer eine Belastungsscheide, deren Abscisse

$$p''' = \frac{m\,y\,\dfrac{n+b}{n-m} - a\,x}{y\,\dfrac{m+b}{n-m} - y\,\dfrac{b}{l} - \dfrac{a\,x}{l}} .$$

Schliesslich wird noch

$$M_{xy}^{\mathrm{IV}} = P_{\mathrm{IV}}\,\frac{l-p}{l}\left(x + y\,\frac{b}{a}\right) ,$$

das für jedes p_{IV} positiv ist.

Wir stellen die gefundenen Resultate wie folgt zusammen:

1) wenn der Momentenpunkt oberhalb OB liegt, ruft eine Last im

1)			2)		
I.	Lastengebiete	$-$	I.	Lastengebiete	$+$
II.	»	$-$	II.	»	$\pm$
III.	»	$\mp$	III.	»	$\mp$
IV.	»	$+$	IV.	»	$+$

2) wenn der Momentenpunkt unterhalb OB liegt, ruft die Last die rechts angegebenen Momente hervor. Wo doppelte Vorzeichen stehen, existirt eine Belastungsscheide.

Hierbei wurde noch immer und wird auch im Folgenden stets vorausgesetzt, dass die Verbindungslinie des Gelenkes A mit dem Momenpunkte die Linie OB in einem Punkte treffe, dessen Abscisse nicht grösser als m ist. Sonst würde noch ein weiterer Fall bezüglich der Lage des Momentenpunktes zu unterscheiden sein.

Das durch ein beliebiges Lastensystem hervorgerufene Moment wird angegeben durch den Ausdruck

$$M_{xy} = x \sum_{x}^{l} P - y \frac{m(n+b)}{a(n-m)} \sum_{m}^{n} P + y \frac{b}{a} \sum_{n}^{l} P - \frac{ax+by}{al} \sum_{o}^{l} Pp + \\ + \sum_{o}^{x} Pp - \frac{y}{a} \sum_{o}^{m} Pp + \frac{m+b}{n-m} \frac{y}{a} \sum_{m}^{n} Pp .$$

Wir stellen jetzt den Ausdruck für das Maximalmoment auf, unter der Voraussetzung, dass der Momentenpunkt oberhalb der Linie OB liege. Es wird

$$M_{xy}{}^{q\max} = \left\{ x - y \frac{m(n+b)}{a(n-m)} \right\} \int_{p'''}^{n} q\, dp + \left\{ \frac{y(m+b)}{a(n-m)} - \frac{yb}{al} - \frac{x}{l} \right\} \int_{p'''}^{n} qp\, dp + \\ + \left(x + y \frac{b}{a} \right) \int_{n}^{l} q \frac{l-p}{l} dp .$$

Nach Ausführung der Integrationen, Substitution des oben gefundenen Ausdruckes für p''' und gehöriger Reduction erhält man

$$M_{xy}{}^{\max} = q \frac{l}{2a} \left\{ ax + by - \frac{n^2(m+b)}{l(n-m)} y + \frac{\left(m \frac{n+b}{n-m} y - ax \right)^2}{l \frac{m+b}{n-m} y - by - ax} \right\} .$$

Ebenso findet man für das durch die mobile Last hervorgerufene Minimalmoment den Ausdruck:

$$M_{xy}{}^{q\min} = \frac{l-x-y\,\frac{b+l}{a}}{l}\int_0^x qp\,dp + x\int_x^m q\,dp - \frac{x+y\,\frac{b+l}{a}}{l}\int_x^m qp\,dp +$$

$$+ \left(x - y\,\frac{m(n+b)}{a(n-m)}\right)\int_m^{p'''} q\,dp + \left(\frac{y(m+b)}{a(n-m)} - \frac{y\,b}{a\,l} - \frac{x}{l}\right)\int_m^{p'''} qp\,dp\ .$$

Aus diesem Ausdrucke wird nach den geeigneten Umformungen

$$M_{xy}{}^{q\min} = \frac{q}{2\,a}\left\{-ax^2 + \frac{y\,m^2(n+b)}{n-m} - \frac{\left(my\,\frac{n+b}{n-m} - ax\right)^2}{y\,\frac{m+b}{n-m} - y\,\frac{b}{l} - \frac{ax}{l}}\right\}.$$

Das durch die permanente Last hervorgerufene Moment ergibt sich aus diesen Ausdrücken, wenn man $M_{xy}{}^{q\max}$ und $M_{xy}{}^{q\min}$ addirt und an die Stelle von q den Buchstaben r setzt. Auch direct kann man dasselbe leicht aufstellen, was sich der Controle über die Richtigkeit der gefundenen Werthe wegen empfiehlt. Man erhält

$$M_{xy}{}^{r} = \frac{r}{2}\left\{x(l-x) - \frac{y}{a}(mn + b(m+n-l))\right\}.$$

Um zu den Grenzmomenten zu gelangen, hat man jetzt noch zu setzen

$$M_{xy}{}^{\max} = M_{xy}{}^{r} + M_{xy}{}^{q\max} \quad \text{und} \quad M_{xy}{}^{\min} = M_{xy}{}^{r} + M_{xy}{}^{q\min}\ ,$$

welche Ausdrücke im folgenden § angeschrieben sind.

§ 65. Druckfläche des Trägers. Um die Druckflächengrenzen zu erhalten, setzen wir die Grenzmomente gleich Null und lösen die entstehenden Gleichungen nach y auf. Durch geeignete Reductionen erhält man

$$M_{xy}{}^{\max} = \frac{r}{2}\left\{x(l-x) - \frac{y}{a}(mn + b(m+n-l))\right\} +$$

$$+ \frac{q}{2\,a}\,\frac{(m+b)(l-n)^2(ax+by)y}{y\{l(m+b) - b(n-m)\} - a(n-m)x}\ ,$$

$$M_{xy}{}^{\min} = \frac{r}{2}\left\{x(l-x) - \frac{y}{a}(mn + b(m+n-l))\right\} -$$

$$- \frac{q}{2a}\,\frac{m^2(l+b)(n+b)y^2 - ayx[x(b(n-m) - l(m+b)) + m(n+b)(2l-m)] + a^2x^2(l-x)(n-m)}{y\{l(m+b) - b(n-m)\} - a(n-m)x}\ .$$

Um zu bequemeren Ausdrücken zu gelangen, führen wir die folgenden abkürzenden Bezeichnungen ein.

Wir setzen

$$\frac{mn + b(m + n - l)}{a} = \alpha \ ,$$

$$\frac{(m + b)(l - n)^2}{a^2} = \beta \ ,$$

$$\frac{l(m + b) - b(n - m)}{a} = \gamma \ ,$$

$$\frac{m^2(l + b)(n + b)}{a^2} = \delta^2 \ ,$$

$$\frac{m(n + b)(2l - m)}{a} = \varepsilon^2 \ .$$

Dadurch vereinfachen sich die Ausdrücke für die Grenzmomente wie folgt:

$$M_{xy}{}^{\max} = \frac{r}{2}\{x(l - x) - \alpha y\} + \frac{q}{2}\frac{\beta(ax + by)y}{\gamma y - (n - m)x} \ ,$$

$$M_{xy}{}^{\min} = \frac{r}{2}(x(l - x) - \alpha y) - \frac{q}{2}\frac{\delta^2 y^2 + yx\{\gamma x - \varepsilon^2\} + x^2(l - x)(n - m)}{\gamma y - (n - m)x} \ .$$

Durch Auflösen der Gleichung $M_{xy}{}^{\max} = 0$ erhält man

$$y' = x\,\frac{-a\beta - \frac{r}{q}[(l-x)\gamma + (n-m)\alpha] \pm \sqrt{\frac{r^2}{q^2}[(l-x)\gamma - (n-m)\alpha]^2 + \frac{2r}{q}[\beta(l-x)(a\gamma + 2b(n-m)) + a\alpha\beta(n-m)] + a^2\beta^2}}{2\left(b\beta - \frac{r}{q}\alpha\gamma\right)} \ .$$

Mit Rücksicht auf die Werthe von β und γ erhält man daraus durch geeignete Umformungen

$$y' = x\,\frac{-a\beta - \frac{r}{q}[(l-x)\gamma + (n-m)\alpha] \pm \sqrt{\left\{a\beta + \frac{r}{q}[\alpha(n-m) - \gamma(l-x)]\right\}^2 + \frac{4r}{q}l(l-x)\frac{(m+b)^2(l-n)^2}{a^2}}}{2\left(b\beta - \frac{r}{q}\alpha\gamma\right)} \ .$$

Die erste Druckflächengrenze ist demnach im Allgemeinen eine Curve vierten Grades.

In ähnlicher Weise erhält man durch Auflösen der Gleichung $M_{xy}{}^{\min} = 0$ für y'' den Werth

$$y'' = x\,\frac{\frac{r}{q}[\gamma(l-x) + \alpha(n-m)] - \gamma x + \varepsilon^2 \pm \sqrt{\left\{\frac{r}{q}[\gamma(l-x) + \alpha(n-m)] - \gamma x + \varepsilon^2\right\}^2 - 4\frac{r+q}{q}(n-m)(l-x)\left(\alpha\gamma\frac{r}{q} + \delta^2\right)}}{2\left(\alpha\gamma\frac{r}{q} + \delta^2\right)} \ .$$

Um die Druckfläche für einen speciellen Fall darstellen zu können, nehmen wir jetzt an, es wäre

1) $r = q$; 2) $a = \frac{l}{2}$; 3) $b = \frac{l}{2}$; 4) $m = 0.6\,l$; 5) $n = 0.7\,l$.

Diesen Werthen entspricht zunächst

$$\alpha = 1.14\,l \ ; \quad \beta = 0.396\,l \ ; \quad \gamma = 2.1\,l \ ; \quad \delta^2 = 2.592\,l^2 \ ; \quad \varepsilon^2 = 2.016\,l^2 \ .$$

Setzt man alle diese Werthe in die vorigen Formeln ein, so wird

$$y' = x\,\frac{2.412 - 2.1\,\frac{x}{l} \pm \sqrt{4.41\,\frac{x^2}{l^2} - 9.252\,\frac{x}{l} + 4.939344}}{4.392},$$

$$y'' = x\,\frac{4.23 - 4.2\,\frac{x}{l} \pm \sqrt{17.64\,\frac{x^2}{l^2} - 31.9432\,\frac{x}{l} + 14.3041}}{9.972},$$

Nimmt man der Reihe nach für $\frac{x}{l}$ die Werthe 0.1, 0.2 u. s. f. an und bezeichnet die Coefficienten von x in der Formel für y', die dem oberen Wurzelvorzeichen entsprechen, mit $c_{,}$, die dem unteren Vorzeichen entsprechenden mit $c_{,,}$ und ebenso die Coefficienten von x in der Formel für y'' mit $k_{,}$ und $k_{,,}$, so erhält man für

$\frac{x}{l} = 0.1$	$c_{,} = 0.8995$	$c_{,,} = 0.10368$	$k_{,} = 0.7151$	$k_{,,} = 0.0490$
$\frac{x}{l} = 0.2$	$c_{,} = 0.8648$	$c_{,,} = 0.0421$	$k_{,} = 0.6344$	$k_{,,} = 0.0455$
$\frac{x}{l} = 0.3$	$c_{,} = 0.7702$	$c_{,,} = 0.0413$	$k_{,} = 0.5497$	$k_{,,} = 0.0460$
$\frac{x}{l} = 0.4$	$c_{,} = 0.6754$	$e_{,,} = 0.0404$	$k_{,} = 0.4648$	$k_{,,} = 0.0466$
$\frac{x}{l} = 0.5$	$c_{,} = 0.5811$	$c_{,,} = 0.0392$	$k_{,} = 0.3797$	$k_{,,} = 0.0475$
$\frac{x}{l} = 0.6$	$c_{,} = 0.4761$	$c_{,,} = 0.0374$	$k_{,} = 0.2938$	$k_{,,} = 0.0491$
$\frac{x}{l} = 0.7$	$c_{,} = 0.3943$	$c_{,,} = 0.0347$	$k_{,} = 0.2062$	$k_{,,} = 0.0525$

Es hat kein Interesse noch weitere Werthe zu ermitteln, da ja die vorausgehende Entwickelung nur für den linken, bis zur Abscisse m reichenden Trägertheil Gültigkeit hat.

Die Coefficienten $c_{,,}$ und $k_{,,}$, welche sich auf die unteren Wurzelvorzeichen beziehen, sind für unsere Untersuchung ebenfalls ohne Bedeutung, da die denselben entsprechenden Punkte eine Lage besitzen, für welche die vorige Entwickelung gleichfalls nicht gilt. Die übrigen Punkte sind in Fig. 40 aufgetragen. Dieselben gehören aber nur soweit der Druckflächengrenze an, als sie oberhalb der Linie OB liegen. Wir haben demnach bis jetzt nur jenes Stück der Druckfläche gefunden, das oberhalb der Linie OB und links von der Vertikalen m liegt. Die Druckflächengrenzen für den zwischen den Abscissen m und n liegenden Theil der Spannweite kann man leicht angeben, da sie gerade Linien sein müssen, die durch den Punkt O gehen.

Der bis jetzt gefundene Theil der Druckfläche des Trägers ist in Fig. 40 schraffirt. Es würde nun noch übrig bleiben, für die Lagen

des Momentenpunktes unterhalb OB resp. rechts von n die der vorigen analoge Entwickelung durchzuarbeiten und die daraus sich ergebenden Stücke der Druckfläche zu verzeichnen. Wir dürfen aber diese mühevolle Arbeit vorerst wohl noch aufschieben, da die Gestalt der Druckfläche in ihrem allgemeinen Verlaufe aus dem Bisherigen hinlänglich erkannt werden kann, um sich ein Bild von der Vertheilung der Kräfte im Träger machen zu können. Es würde auch wenig nützen, eine noch weiter ausgebaute Theorie dieser Träger zu veröffentlichen, bevor letztere einigermaassen in Fachkreisen bekannt und dort einigem Interesse begegnet sind.

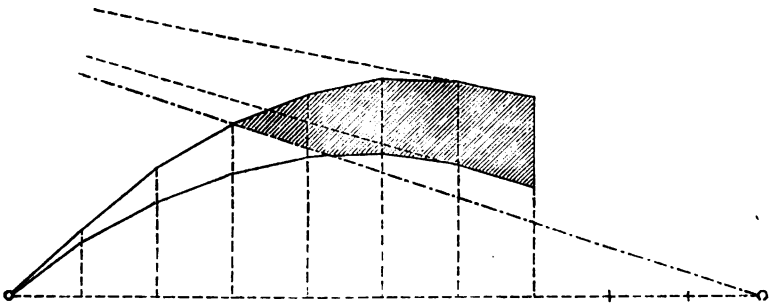


Fig. 40.

Nähere Angaben hinsichtlich des Materialverbrauches dieser Träger im Vergleiche zu anderen Systemen vermag ich jetzt nicht zu machen. Man wird dieser Frage überhaupt erst dann näher treten können, wenn man sich einigermaassen über die günstigste Lage des imaginären Gelenkes O orientirt hat.

2. Anordnung des Trägers nach Fig. 41.

§ 66. Die in den vorigen §§ durchgeführten Entwickelungen lassen sich auch für diese Anordnung noch theilweise benützen. Namentlich gelten die dort aufgestellten Werthe für die Auflagerreactionen und die

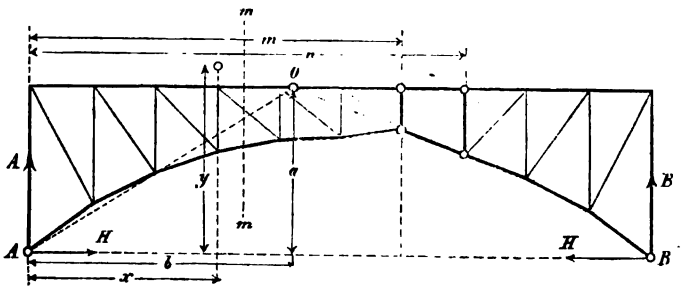


Fig. 41.

Momente auch in diesem Falle, wenn man in denselben b allenthalben negativ setzt. Dadurch erhält man

$$A = P\frac{l-p}{l}\ ;\quad B = P\frac{p}{l}\ ,$$

ferner

$$H_{,} = P_{,}p\ \frac{l-b}{al}\ ;\quad H_{,,} = P_{,,}b\ \frac{l-p}{al},$$

und

$$H_{,,} = \frac{P_{,,}}{a}\left\{\frac{m(n-b)-p(m-b)}{n-m} - p\ \frac{b}{l}\right\}\ .$$

Für die Momente erhält man ebenso

$$M_{xy}' = \frac{P_{,}p}{l}\left(l - x - y\ \frac{l-b}{a}\right)\ .$$

Es gibt also im ersten Lastengebiete keine Belastungsscheide. Das Moment ist vielmehr immer positiv oder negativ, jenachdem der Momenpunkt unterhalb oder oberhalb der Linie OB liegt. Ferner wird

$$M_{xy}'' = P_{,,}x - P_{,,}p\left(\frac{x}{l} + y\ \frac{l-b}{al}\right)\ .$$

Es existirt eine Belastungsscheide, deren Abscisse

$$p'' = \frac{alx}{ax + y(l-b)}\ .$$

Für den dritten Fall wird

$$M_{xy}''' = P_{,,,}\left(x - y\ \frac{m(n-b)}{a(n-m)}\right) + P_{,,,}p\left(\frac{y(m-b)}{a(n-m)} + \frac{yb}{al} - \frac{x}{l}\right)$$

und die Abscisse $p_{,,,}$ der Belastungsscheide im dritten Lastengebiete wird

$$p_{,,,} = \frac{my\ \dfrac{n-b}{n-m} - ax}{y\ \dfrac{m-b}{n-m} + y\ \dfrac{b}{l} - \dfrac{ax}{l}}\ .$$

Für M_{xy}^{IV} erhält man

$$M_{xy}^{\mathrm{IV}} = P_{\mathrm{IV}}\ \frac{l-p}{l}\left(x - y\ \frac{b}{a}\right)\ .$$

M_{xy}^{IV} ist also immer entweder positiv oder negativ, jenachdem der Momentenpunkt unterhalb oder oberhalb der Linie AO liegt.

Die weitere Entwickelung kann jetzt genau entsprechend der vorigen durchgeführt werden, weshalb nicht weiter darauf eingegangen werden soll.

Wir bemerken noch, dass für die praktische Berechnung derartiger Träger ohne Zweifel die graphische Methode der analytischen bedeutend

vorzuziehen ist. Dieselbe kann genau der graphischen Behandlung der gewöhnlichen Bogenträger mit drei Gelenken entsprechend durchgeführt werden, weshalb wir wohl auf eine Auseinandersetzung verzichten dürfen.

C. Berechnung der Bogenträger mit imaginären Kämpfergelenken und einem eigentlichen Mittelgelenke.

Bestimmung der Auflagerdrücke.

§ 67. Wir wollen nicht unterlassen, auch die Berechnung dieser Träger in allgemeinen Zügen anzudeuten, da uns dieselben ein besonderes Interesse zu verdienen scheinen. Wir beschränken uns aber dabei auf die Betrachtung der in Fig. 42 angenommenen Anordnung.

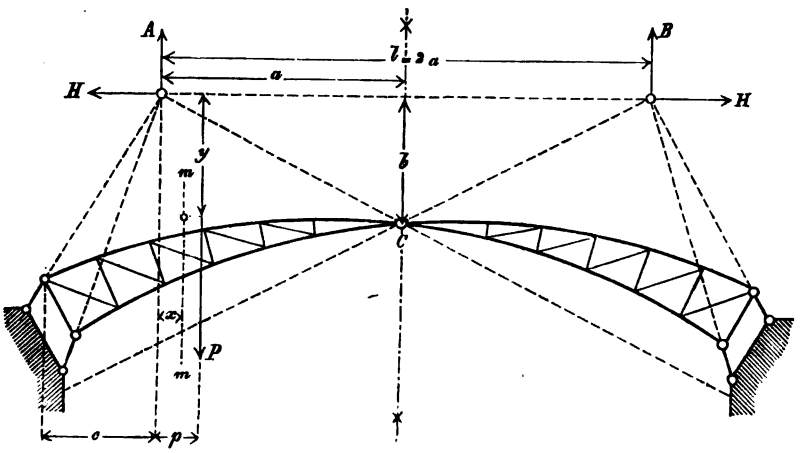


Fig. 42.

Der Auflagerdruck auf jedes Widerlager setzt sich zusammen aus den Einzeldrücken, die von den Stäben des imaginären Gelenkes ausgeübt werden. Die Richtungslinie desselben muss, wie schon früher auseinandergesetzt, stets durch das imaginäre Gelenk (d. i. der Schnittpunkt der beiden Auflagerstäbe) hindurchgehen. Jede der beiden Gesammt-Auflagerreactionen denken wir uns in den imaginären Gelenken in horizontale und verticale Componenten zerlegt. Wir bezeichnen sowohl das linkseitige imaginäre Gelenk, als auch die durch dasselbe hindurchgehende verticale Componente der Auflagerreaction mit dem Buchstaben A. Den Punkt A nehmen wir als Coordinatenursprung an und rechnen die nach rechts hin laufenden Abscissen sowie die nach abwärts

gehenden Ordinaten positiv. Die horizontalen Auflagercomponenten rechnen wir positiv, wenn sie einen Zug, negativ, wenn sie einen Horizontalschub bedeuten. Im Uebrigen verweisen wir auf die in die Figur eingeschriebenen Bezeichnungen.

Die verticalen Componenten A und B bestimmen sich auch hier wieder nach den Formeln

$$A = P\frac{l-p}{l} \quad \text{und} \quad B = \frac{Pp}{l}$$

für jede Lage der Last. Dabei ist nur zu bemerken, dass sowohl p als auch $l-p$ negativ sein kann.

Die durch eine Last P_n, welche auf die rechte Trägerhälfte wirkt, hervorgerufene Horizontalcomponente H_n ergibt sich durch Aufstellen der Momentengleichung für den Punkt C:

$$H_n = A_n\frac{a}{b} = P_n\frac{l-p}{2b} .$$

H_n wird negativ, also ein Horizontalschub, wenn P_n über B nach rechts hinaus fällt.

Ebenso erhält man

$$H_1 = B\frac{a}{b} = P_1\frac{p}{2b} .$$

Für zusammengesetzte Lastensysteme sind die entsprechenden Summen zu bilden.

Aufstellen der Momentenausdrücke.

§ 68. Wir nehmen hier durchweg an, dass der Momentenpunkt von den Linien AC und BC resp. deren Verlängerungen in der Weise eingeschlossen sei, wie es die Figur angibt.

Dann wird für den Punkt xy des Schnittes mm als Momentenpunkt

$$M_{xy} = Ax - Hy - \sum_{-c}^{x} P(x-p)$$

$$= x\sum_{x}^{l+c} P + \frac{l-x}{l}\sum_{-c}^{x} Pp - \frac{x}{l}\sum_{x}^{l+c} Pp - \frac{y}{2b}\left\{\sum_{-c}^{a} Pp - \sum_{a}^{l+c} Pp + l\sum_{a}^{l+c} P\right\}.$$

Dieser Ausdruck gilt auch für negative Werthe von x.

Wir unterscheiden jetzt drei Lastengebiete zwischen den Abscissen $-c$ und x, zwischen x und a und zwischen a und $l+c$, die wir in der angegegebenen Reihenfolge nummeriren. Dann wird

$$M_{xy}' = P_1 p\left(\frac{l-x}{l} - \frac{y}{2b}\right) .$$

Da der Momentenpunkt oberhalb der Linie BC liegen soll, ist M_{xy}' hiernach immer positiv, wenn p positiv ist, und negativ, wenn p negativ ist. Die Verticale durch A bildet demnach eine Belastungsscheide. Ferner wird

$$M_{xy}'' = P_n x - P_n p \left(\frac{x}{l} + \frac{y}{2b}\right) .$$

Setzt man diesen Werth gleich Null und löst nach p auf, so erhält man die Abscisse einer zweiten Belastungsscheide

$$p'' = \frac{x}{\frac{x}{l} + \frac{y}{2b}} .$$

Schliesslich erhält man für den dritten Fall

$$M_{xy}''' = P_n (l - p)\left(\frac{x}{l} - \frac{y}{2b}\right) .$$

Da der Momentenpunkt unterhalb der Linie AC liegen soll, hat das Moment M_{xy}''' stets das entgegengesetzte Vorzeichen von $(l - p)$. Die Verticale durch den Punkt B bildet also ebenfalls eine Belastungsscheide.

Wir stellen jetzt zunächst die Grenzmomente, welche durch die mobile Last q hervorgerufen werden, für den Fall auf, dass der Momentenpunkt links von der durch A gezogenen Verticalen liegt. Dann bleibt nur die dritte Belastungsscheide zu berücksichtigen. Alle Lasten von $-c$ bis l rufen negatives, jene von l bis $l + c$ positives Moment hervor. Man erhält

$$M_{xy}^{q\max} = \sum_{l}^{l+c} M_{xy}''' = \left(\frac{y}{2b} - \frac{x}{l}\right) q \frac{c^2}{2} ,$$

$$M_{xy}^{q\min} = \left(\frac{l-x}{l} - \frac{y}{2b}\right)\int_{-c}^{x} qp\,dp + x\int_{x}^{a} q\,dp - \left(\frac{x}{l} + \frac{y}{2b}\right)\int_{x}^{a} qp\,dp +$$

$$+ \left(\frac{x}{l} - \frac{y}{2b}\right)\left(\int_{a}^{l} ql\,dp - \int_{a}^{l} qp\,dp\right)$$

$$= q\,\frac{l-x}{2l}(lx - c^2) - q\,\frac{y}{8b}(l^2 - 2c^2) .$$

Daraus ergibt sich durch Addition beider Ausdrücke und Einsetzen von r an die Stelle von q

$$M_{xy}^{r} = r\,\frac{y}{2b}\left(c^2 - \frac{l^2}{4}\right) + rx\,\frac{l-x}{2} - r\,\frac{c^2}{2} ,$$

wie man auch direct leicht finden kann. Die Gleichungen der Druckflächengrenzen erhält man jetzt wie folgt:

$M_{xy}^{q\max} + M_{xy}^{r} = 0$ für die erste und $M_{xy}^{q\min} + M_{xy}^{r} = 0$ für die zweite Druckflächengrenze. Durch Auflösen nach y findet man

$$y' = 4b\,\frac{\frac{q}{r}\frac{x}{l}c^2 + c^2 - x(l-x)}{2\frac{q}{r}c^2 + 4c^2 - l^2},$$

$$y'' = 4b\,\frac{\frac{r+q}{r}x(l-x) - \frac{q}{r}\frac{l-x}{l}c^2 - c^2}{\frac{r+q}{r}(l^2 - 2c^2) - 2c^2}.$$

Beide Linien sind also Parabeln mit senkrechter Axe.

Jetzt gehen wir zur Betrachtung des Falles über, dass der Momentenpunkt rechts von der durch A gezogenen Verticalen liegt. Um das Maximalmoment hervorzubringen, müssen wir die Strecken von o bis p'' und von l bis $l+c$ möglichst viel, die übrigen möglichst wenig belasten. Man erhält daher

$$M_{xy}^{q\max} = \left(\frac{l-x}{l} - \frac{y}{2b}\right)\int_0^x qp\,dp + x\int_x^{p''} q\,dp - \left(\frac{x}{l} + \frac{y}{2b}\right)\int_x^{p''} qp\,dp + \\ + \left(\frac{x}{l} - \frac{y}{2b}\right)\left(\int_l^{l+c} ql\,dq - \int_l^{l+c} qp\,dp\right),$$

woraus man nach Einsetzen des oben gefundenen Werthes von p'' und gehöriger Reduction erhält

$$M_{xy}^{q\max} = q\frac{x^2}{2}\,\frac{\frac{l-x}{l} - \frac{y}{2b}}{\frac{x}{l} + \frac{y}{2b}} - q\frac{c^2}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{y}{2b}\right).$$

Ebenso wird

$$M_{xy}^{q\min} = \left(\frac{l-x}{l} - \frac{y}{2b}\right)\int_{-c}^{0} qp\,dp + x\int_{p''}^{a} q\,dp - \left(\frac{x}{l} + \frac{y}{2b}\right)\int_{p''}^{a} qp\,dp + \\ + \left(\frac{x}{l} - \frac{y}{2b}\right)\int_a^l q(l-p)\,dp,$$

woraus sich in gleicher Weise ergibt

$$M_{xy}^{q\min} = -\frac{qx^2}{2\left(\frac{x}{l} + \frac{y}{2b}\right)} + q\frac{lx}{2} - q\frac{l^2y}{8b} + q\frac{c^2}{2}\left(\frac{y}{2b} - \frac{l-x}{l}\right).$$

Für M_{xy}^{r} erhält man wie oben

$$M_{xy}^{r} = r\frac{y}{2b}\left(c^2 - \frac{l^2}{4}\right) + rx\frac{l-x}{2} - r\frac{c^2}{2}.$$

Löst man darauf die Gleichungen

$$M_{xy}^{q\max} + M_{xy}^{r} = 0 \quad \text{und} \quad M_{xy}^{q\min} + M_{xy}^{r} = 0$$

nach y auf, so erhält man

$$y' = 2b\,\frac{\frac{r+q}{r}\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{2}\frac{x}{l} + \frac{c^2}{l^2}\frac{l-2x}{l} \pm \sqrt{\left\{\frac{r+q}{r}\frac{x^2}{l^2} - \frac{x}{2l} + \frac{c^2}{l^2}\frac{l-2x}{l}\right\}^2 + 2K\left(\frac{c^2}{l^2}\frac{x}{l} + \frac{q}{r}\frac{c^2}{l^2}\frac{x^2}{l^2} - \frac{r+q}{r}\frac{x^2}{l^2}\frac{l-x}{l}\right)}}{K}.$$

In dieser Formel bedeutet K den (für jeden Träger constanten) Ausdruck

$$K = 2\,\frac{q}{r}\frac{c^2}{l^2} + 4\,\frac{c^2}{l^2} - 1\,.$$

Für die Ordinate der zweiten Druckflächengrenze erhält man

$$y'' = -\frac{2bx}{l} + b\,\frac{\frac{x}{l}\left(\frac{x}{l} + 2\,\frac{c^2}{l^2}\right) - \frac{r+q}{r}\left(\frac{3}{2}\frac{x}{l} - \frac{c^2}{l^2}\right) \pm \sqrt{\left\{\frac{x}{l}\left(\frac{x}{l} + 2\,\frac{c^2}{l^2}\right) - \frac{r+q}{r}\left(\frac{3}{2}\frac{x}{l} - \frac{c^2}{l^2}\right)\right\}^2 + 4\,\frac{q}{r}\frac{x^2}{l^2}L}}{L}.$$

Darin bedeutet L den Ausdruck

$$L = \frac{2r+q}{r}\,\frac{c^2}{l^2} - \frac{r+q}{2r}\,.$$

D. Berechnung der Träger mit schiefer Lagerung.

§ 69. Auch diese Träger sind als Bogenträger aufzufassen, wenn sie denselben auch äusserlich nicht gleichen. Die Lasten rufen aber ausser senkrechten Auflagerdrücken auch horizontale Auflagerkräfte hervor, und die Träger wirken daher als Bögen.

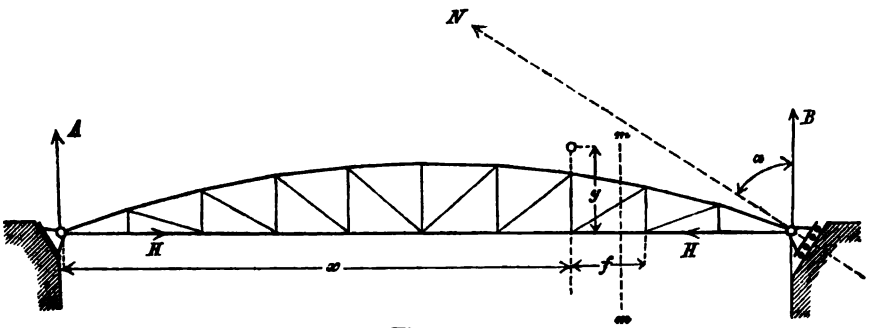


Fig. 43.

Wir beschränken uns auf die Behandlung der in Fig. 43 angegebenen einfachsten Anordnung der Träger. Die Auflagerreactionen bestimmen sich hier wie folgt:

$$A = P\frac{l-p}{l}\ ;\quad B = P\frac{p}{l}\ ;\quad N = \frac{B}{\cos\alpha} = P\frac{p}{l\cos\alpha}\ ,$$

$$H = B\cdot\operatorname{tg}\alpha = \frac{Pp}{l}\operatorname{tg}\alpha$$

für alle Lagen der Last P.

Legt man den Schnitt mm durch den Träger und stellt in Bezug auf den Punkt xy das Moment der am linken Trägertheile angreifenden äusseren Kräfte auf, so erhält man

$$M_{xy} = A\cdot x - H\cdot y - \sum_{o}^{x} P(x-p)\ ,$$

woraus man nach Einsetzen der Werthe von A und H erhält

$$M_{xy} = \frac{l-x-y\operatorname{tg}\alpha}{l}\sum_{o}^{l} Pp + x\sum_{x}^{l} P - \sum_{x}^{l} Pp\ .$$

Wir unterscheiden jetzt die Lastengebiete zwischen o und x und zwischen x und l und erhalten

$$M_{xy}' = \frac{l-x-y\operatorname{tg}\alpha}{l}P_1 p\ ;\quad M_{xy}'' = xP_2 - \frac{x+y\operatorname{tg}\alpha}{l}P_2 p\ .$$

Da $l - x - y\operatorname{tg}\alpha = o$ die Gleichung der Linie N ist, hat M_{xy}' für solche Momentenpunkte, die unterhalb N liegen, stets positives Vorzeichen. Dagegen existirt im zweiten Lastengebiete eine Belastungsscheide, deren Abscisse

$$p'' = \frac{lx}{x+y\operatorname{tg}\alpha}\ .$$

Man kann dieselbe leicht durch Construction finden, indem man den Schnittpunkt der Linie N mit der Verbindungslinie des Auflagerpunktes A und des Momentenpunktes xy aufsucht.

Für die Annahme gleichförmig vertheilter Belastungen erhält man daher

$$M_{xy}^{q\max} = \frac{l-x-y\operatorname{tg}\alpha}{l}\int_{o}^{p''} qp\,dp + x\int_{x}^{p''} q\,dp - \int_{x}^{p''} qp\,dp\ ,$$

woraus nach gehöriger Reduction

$$M_{xy}^{q\max} = q\,\frac{lx^2}{2(x+y\operatorname{tg}\alpha)} - \frac{qx^2}{2}\ .$$

Ebenso wird

$$M_{xy}^{q\min} = \frac{l-x-y\operatorname{tg}\alpha}{l}\int_{p'}^{l} qp\,dp + x\int_{p'}^{l} q\,dp - \int_{p''}^{l} qp\,dp$$

$$= q\,\frac{l}{2}(x - y\operatorname{tg}\alpha) - \frac{qlx^2}{2(x+y\operatorname{tg}\alpha)}\ .$$

Daraus ergibt sich das durch die permanente Last r hervorgerufene Moment

$$M_{xy}^{r} = \frac{r\,l}{2}(x - y\,\mathrm{tg}\,\alpha) - \frac{r\,x^2}{2}\,.$$

Die Grenzmomente ergeben sich hierauf durch Addition von $M_{xy}^{q\,\max}$ resp. $M_{xy}^{q\,\min}$ zu M_{xy}^{r}. Von Interesse ist noch der schon früher bei der Behandlung der Bogenträger mit drei eigentlichen Gelenken benützte Ausdruck G_{xy}, der die Summe der Absolutwerthe der beiden Grenzmomente für den Fall darstellt, dass der Momentenpunkt innerhalb der Druckfläche liegt. Man erhält

$$G_{xy} = M_{xy}^{\max} - M_{xy}^{\min} = \frac{q\,l\,x^2}{x + y\,\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{q\,l}{2}\,y\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{q\,x}{2}(l + x)\,.$$

Derselbe hängt hier, wie überhaupt bei allen Constructionen, von der Grösse der permanenten Last nicht mehr ab.

Durch Auflösen der Gleichungen $M_{xy}^{\max} = 0$ und $M_{xy}^{\min} = 0$, welche die Gleichungen der Druckflächengrenzen darstellen, erhält man für die Ordinaten dieser Linien

$$y' = -\frac{\left(1 + \frac{q}{r}\right)x^2}{2\,l\,\mathrm{tg}\,\alpha} \pm x\,\mathrm{cotg}\,\alpha\,\sqrt{\left\{\frac{x}{2\,l}\left(1 + \frac{q}{r}\right) - 1\right\}^2 + \frac{q}{r}}\,,$$

$$y'' = -\frac{x^2\,\mathrm{cotg}\,\alpha}{2\,l\left(1 + \frac{q}{r}\right)} \pm x\,\mathrm{cotg}\,\alpha\,\sqrt{\left(\frac{x}{2\,l}\,\frac{1}{1 + \frac{q}{r}} - 1\right)^2 - \frac{1}{1 + \frac{q}{r}}}\,.$$

Von den Wurzelvorzeichen ergeben nur die positiven brauchbare Lösungen.

In Fig. 44 ist die Druckfläche eines derartigen Trägers für den Fall dargestellt, dass $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$ und $q = 2r$ ist.

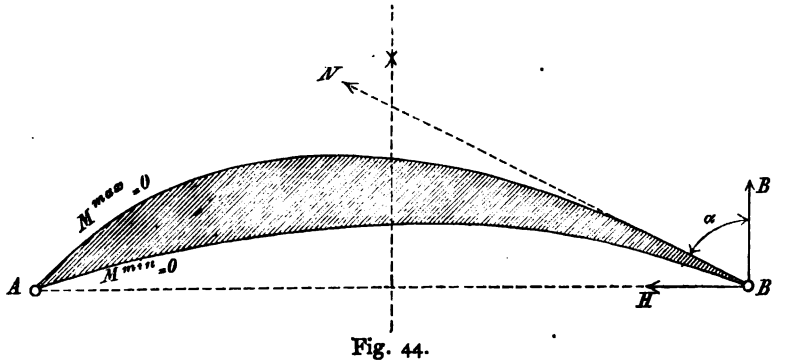


Fig. 44.

Setzt man den Ausdruck für M_{xy}^{r} gleich Null und löst nach y auf, so erhält man die Gleichung der Drucklinie, welche dem Falle entspricht,

dass der Träger nur durch sein eigenes Gewicht belastet ist. Man findet hierdurch

$$y = \frac{x(l-x)}{l \operatorname{tg} \alpha} .$$

Diese Drucklinie ist also eine durch die beiden Auflagerpunkte gehende Parabel mit senkrechter Axe. Gibt man der oberen Gurtung die Gestalt dieser Parabel, so werden weder in der unteren Gurtung, noch in den Füllungstheilen Spannungen durch die permanente Last hervorgerufen. — Man kann für diesen Fall auch das theoretische Volumen der unteren Gurtung leicht angeben, wenn man den Einfluss der abwechselnd auftretenden Zug- und Druckspannungen in der Weise berücksichtigt, wie es die Amerikaner thun. (Vgl. § 61.) Es ist nämlich für diese Annahme das theoretische Volumen V

$$V = \frac{1}{K} \int_0^l \frac{Gxy}{y} \, dx ,$$

worin K den Festigkeitscoefficienten bedeutet. Der Ausdruck unter dem Integralzeichen lässt sich aber hier nach Einsetzen des für y angenommenen Werthes auf die sehr einfache Form bringen

$$\frac{Gxy}{y} = ql \operatorname{tg} \alpha \frac{l-x}{2l-x} = ql \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \frac{l}{2l-x}\right) .$$

Da nun $\int \frac{l}{2l-x} dx = -l \log \text{nat} (2l-x)$ ist, erhält man für V den einfachen Ausdruck

$$V = q \frac{l^2 \operatorname{tg} \alpha}{K} \left(1 + \log \text{nat} \frac{1}{2}\right) = 0.30685 \, q \frac{l^2 \operatorname{tg} \alpha}{K} .$$

Führt man dagegen den Parabelträger in derselben Gestalt als gewöhnlichen Balkenträger, also mit horizontalem Auflager, aus, so erhält man für das theoretische Volumen V_1 der unteren Gurtung, wenn man nur die grössten Zugspannungen bei der Bestimmung der Dimensionen berücksichtigt und dabei den Coefficienten K_1 zur Anwendung bringt,

$$V_1 = \frac{1}{K_1} q \frac{l^2 \operatorname{tg} \alpha}{2} ,$$

wie sich leicht zeigen lässt.

Die Stäbe der oberen Gurtung des Trägers mit schiefer Lagerung, sowie die Füllungsstäbe können genau ebenso berechnet werden, als wenn der Träger horizontal aufgelagert wäre. Der Horizontalschub H hat nämlich in Bezug auf die Momentenpunkte dieser Stäbe bei der hier

vorausgesetzten Anordnung kein Moment. Der Materialverbrauch für dieselben ist desshalb von der Grösse des Winkels α ganz unabhängig.

IV. Berechnung der statisch bestimmten Balkenträger mit imaginären Gelenken.

A. Träger über einer Spannweite.

§ 70. In Fig. 45 ist ein derartiger Träger skizzirt. Er stellt eine Verallgemeinerung des gewöhnlichen Balkenbrückensystemes vor. Dass er mit Recht ein Balkenträger genannt wird, geht daraus hervor, dass er auf beide Pfeiler nur senkrechte Auflagerkräfte überträgt. Allerdings überträgt er diese senkrechte Auflagerkraft auf den linken Pfeiler in Form von zwei Componenten. Das sind nämlich die beiden Einzeldrücke, die von den Stäben des imaginären Gelenkes auf denselben ausgeübt werden.

Der Auflagerdruck A sucht den Pfeiler nach rechts hin umzustürzen. Die Construction ist desshalb nur dann zulässig, wenn der Pfeiler genügend belastet ist, um diesem Bestreben zu widerstehen. Befindet sich auf der anderen Seite des Pfeilers ein ähnlich construirtes Auflager des Trägers der nächsten Oeffnung, so heben sich die ungünstigen Einwirkungen grössten Theiles auf, namentlich dann, wenn die permanente Last bedeutender ist als die mobile, wie es bei grösseren Strassenbrücken beispielsweise der Fall zu sein pflegt.

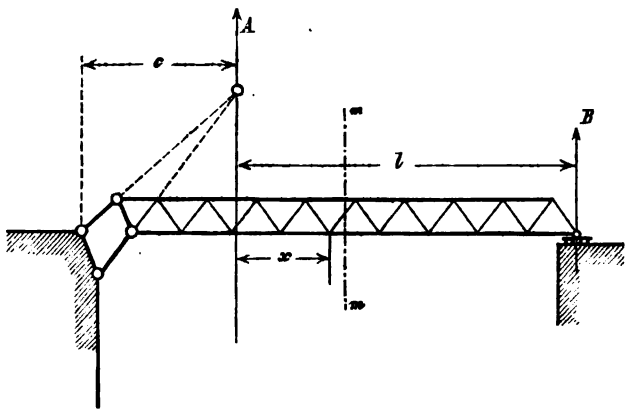


Fig. 45.

Der in Fig. 45 dargestellte Träger hat die grösste Aehnlichkeit mit einem an seinem linken Ende eingemauerten Träger oder auch mit einem

Endfelde eines continuirlichen Balkens. Mit dem ersteren theilt er auch die Eigenschaft, auf den betreffenden Pfeiler ein Umsturzmoment auszuüben.

Die Berechnung gestaltet sich sehr einfach. Mit Bezug auf die in die Figur eingeschriebenen Bezeichnungen erhält man

$$A = P\frac{l-p}{l} \text{ und } B = P\frac{p}{l} .$$

Ist p negativ, so wird auch B negativ. Man hat natürlich dafür Sorge zu tragen, dass das einem beliebigen möglichen Belastungsfalle entsprechende B niemals negativ werden kann, damit das rechtsseitige Auflager in der gewöhnlichen Weise construirt werden kann.

Wir legen den Schnitt mm durch den Träger und stellen das Moment M_x der äusseren Kräfte in Bezug auf einen Punkt auf, dessen Abscisse $= x$ und dessen Ordinate beliebig ist. Man erhält

$$M_x = A \cdot x - \sum_{-c}^{x} P(x-p) = x\sum_{x}^{l} P - \frac{x}{l}\sum_{x}^{l} Pp + \frac{l-x}{l}\sum_{-c}^{x} Pp .$$

Dieser Ausdruck gilt auch für negative Werthe von x.

Wir unterscheiden jetzt zwei Lastengebiete zwischen $-c$ und x und zwischen x und l. Unter Zugrundelegung der früheren Bezeichnungen erhält man

$$M_x' = \frac{l-x}{l} P_1 p \text{ und } M_x'' = xP_n - \frac{x}{l} P_n p = \frac{l-p}{l} xP_n .$$

Man erkennt daraus, dass nur, wenn x positiv ist, eine Belastungsscheide, und zwar im ersten Lastengebiete existirt, deren Abscisse gleich Null ist. Für die Momentenpunkte links von A ruft jede Last negatives Moment hervor; für die rechts von A liegenden Momentenpunkte bringen die zwischen den Abscissen $-c$ und o angreifenden Lasten negatives, alle übrigen positives Moment hervor.

In Bezug auf Momentenpunkte der letztgenannten Art erhält man daher

$$M_x^{q\max} = x\int_x^l q\,dp - \frac{x}{l}\int_x^l qp\,dp + \frac{l-x}{l}\int_o^x qp\,dp = qx\frac{l-x}{2} ,$$

$$M_x^{q\min} = \frac{l-x}{l}\int_{-c}^{o} qp\,dp = -q(l-x)\frac{c^2}{2l} ,$$

$$M_x^r = \frac{r}{2}(l-x)\left(x - \frac{c^2}{l}\right) .$$

Für links von A liegende Momentenpunkte ist $M_x^{q\max} = o$, während $M_x^{q\min}$ erhalten wird, wenn man in dem soeben für M_x^r aufge-

stellten Ausdrucke q an die Stelle von r setzt. Der Ausdruck für M_x^r gilt nämlich auch für negative Werthe von x.

Man veranschaulicht die erhaltenen Resultate am deutlichsten durch die Darstellung der Momentencurven für einen speciellen Fall. Zu diesem Zwecke nehmen wir jetzt an, es wäre

$$r = q \quad \text{und} \quad c^2 = \frac{1}{20} l^2 .$$

Dann wird für die rechts von A liegenden Momentenpunkte

$$M_x^{\max} = r(l - x)\left(x - \frac{l}{40}\right) \quad \text{und} \quad M_x^{\min} = r(l - x)\left(\frac{x}{2} - \frac{l}{20}\right) ,$$

während für die links von A liegenden Momentenpunkte

$$M_x^{\max} = \frac{r}{2}(l - x)\left(x - \frac{l}{20}\right) \quad \text{und} \quad M_x^{\min} = 2 M_x^{\max} = r(l - x)\left(x - \frac{l}{20}\right) .$$

Fig. 46 zeigt den Verlauf der Momentencurven und ist wohl ohne weitere Erklärung verständlich. Wir machen nur noch darauf aufmerksam, dass der Verlauf der Curven die oben erwähnte Aehnlichkeit des Trägers mit dem eingespannten Balken hinreichend darthut.

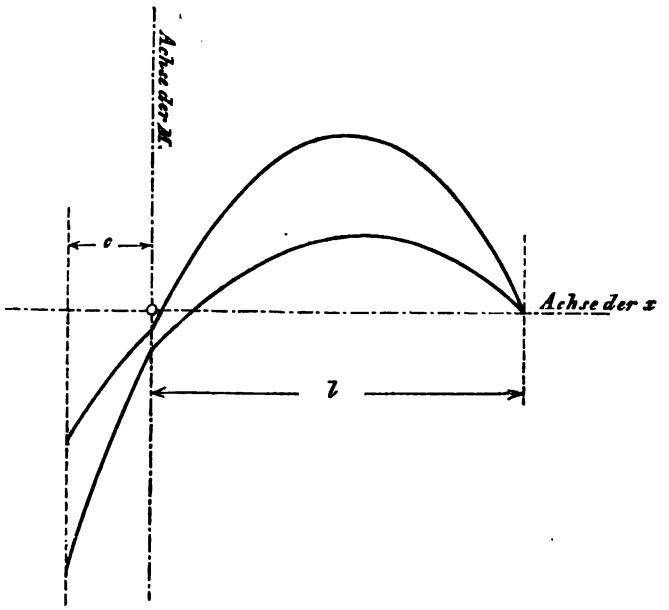


Fig. 46.

Man könnte an die soeben dargelegte Entwickelung sehr leicht die Ermittelung des theoretischen Volumens der Gurtungen anknüpfen und

einen Vergleich mit dem gewöhnlichen Balkenträger hinsichtlich der Materialöconomie herbeiführen. Vorläufig erscheint uns ein weiteres Eingehen jedoch überflüssig zu sein.

Die Ausdrücke für die verticalen Scheerkräfte und damit auch jene für die Spannungen der Füllungstheile lassen sich eben so leicht aufstellen als die Momentenwerthe. Wir werden darauf wohl verzichten dürfen.

B. Gerber'sche Träger mit imaginären Gelenken.

§ 71. Die Berechnung dieser Träger lässt sich ebenfalls in höchst einfacher Weise durchführen. Wir beschränken uns hier auf die Besprechung der in Fig. 47 skizzirten Anordnung.

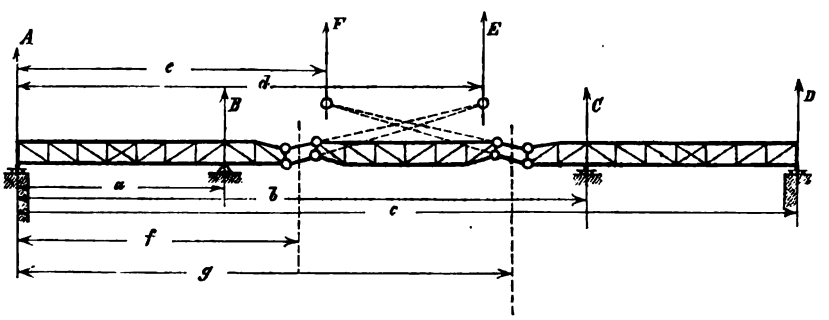


Fig. 47.

Zunächst sieht man ein, dass die Resultirende aus den Spannungen der Stäbe, die zusammen ein imaginäres Gelenk bilden, immer eine senkrecht gerichtete Kraft sein muss. Um die Stabspannungen zu bestimmen, die einem bestimmten Belastungsfalle entsprechen, hat man zunächst die Auflagerkräfte und die durch die imaginären Gelenke übertragenen Kräfte zu bestimmen. Zu diesem Zwecke dienen die folgenden Componenten- und Momentengleichungen

$$A + B - E - \sum_{o}^{f} P = o \,,$$

$$E + F - \sum_{f}^{g} P = o \,,$$

$$C + D - F - \sum_{g}^{c} P = o \,,$$

$$- Ba + Ed + \sum_{o}^{f} Pp = o \,,$$

$$-E(d-e)+\sum_{f}^{g}P(p-e)=0\ ,$$

$$-C(b-e)-D(c-e)+\sum_{g}^{c}P(p-c)=0\ .$$

Mit ihrer Hülfe lassen sich die 6 Kräfte A bis F als Functionen der Belastungen darstellen. Die in denselben vorkommenden Bezeichnungen finden ihre Erklärung durch die in die Figur eingeschriebenen Buchstaben.

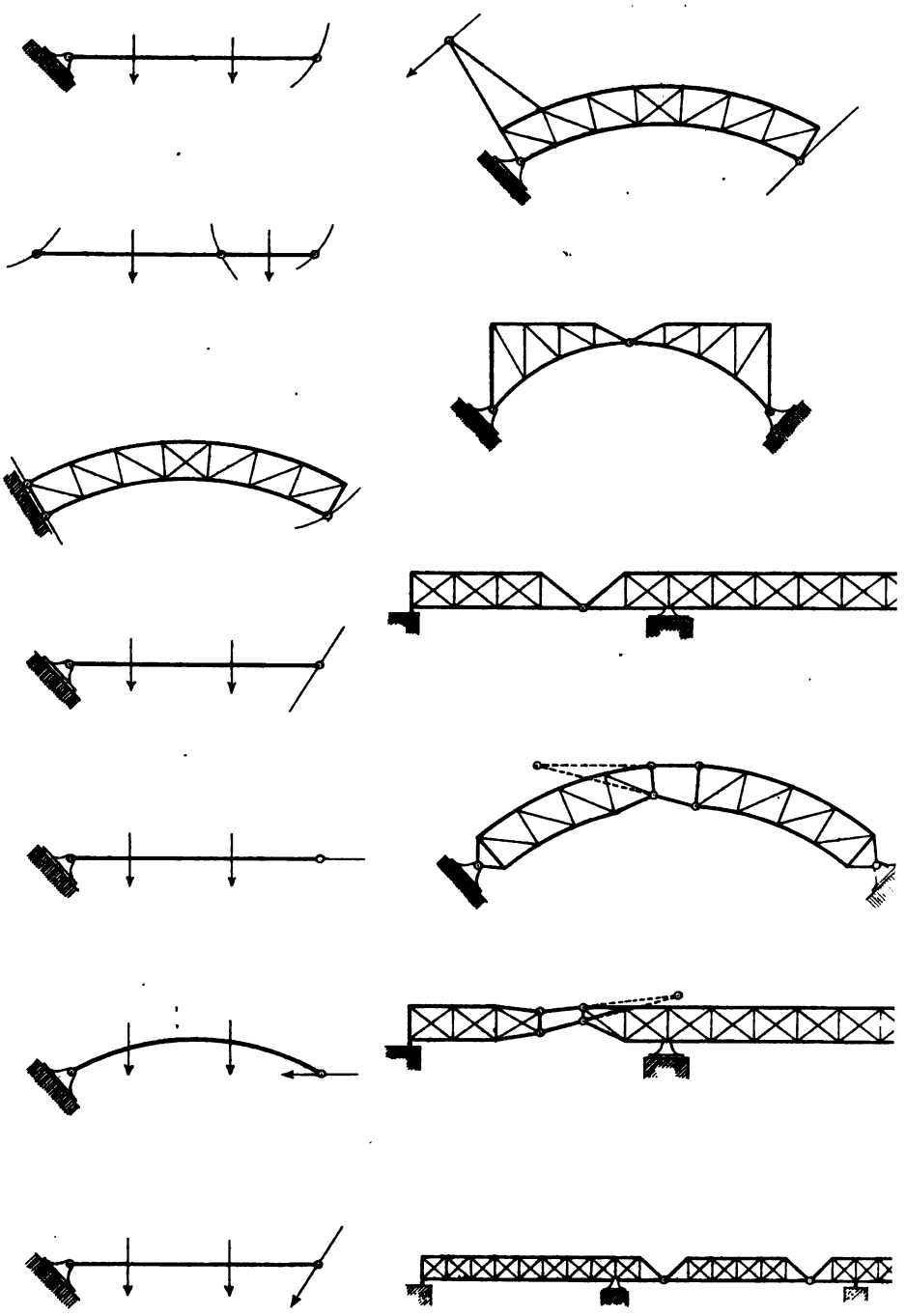
Die Spannung eines beliebigen Stabes, die dem angenommenen Belastungsfalle entspricht, findet man hierauf in bekannter Weise durch Führung eines Schnittes und Aufstellen der Momentengleichung für den Momentenpunkt des Stabes.

Die Bestimmung der ungünstigsten Lastenstellung muss für Stäbe der zwischen den Abscissen o und a, zwischen a und f, zwischen f und g, zwischen g und b und zwischen b und c liegenden Trägertheile gesondert durchgeführt werden. Man hat zu diesem Zwecke jedesmal 6 Lastengebiete zu unterscheiden, und zu untersuchen, ob und welche Belastungsscheiden in denselben vorkommen. Daraus ergibt sich leicht die ungünstigste Belastungsart und die derselben entsprechende ungünstigste Stabspannung durch das oben angedeutete Verfahren.

Die ausführlichere Behandlung dieses Trägersystemes würde ohne Zweifel von Interesse sein. Wir werden auch nicht verfehlen, eine solche später einmal zu veröffentlichen, wenn sich in dem Kreise der Fachgenossen ein Verlangen danach zeigt. Einstweilen kann unsere Behandlung des Systemes nur den Zweck haben, Interesse für dasselbe zu erwecken, und dazu erscheint uns eine kurze Besprechung noch besser geeignet, als eine ausführliche Behandlung.

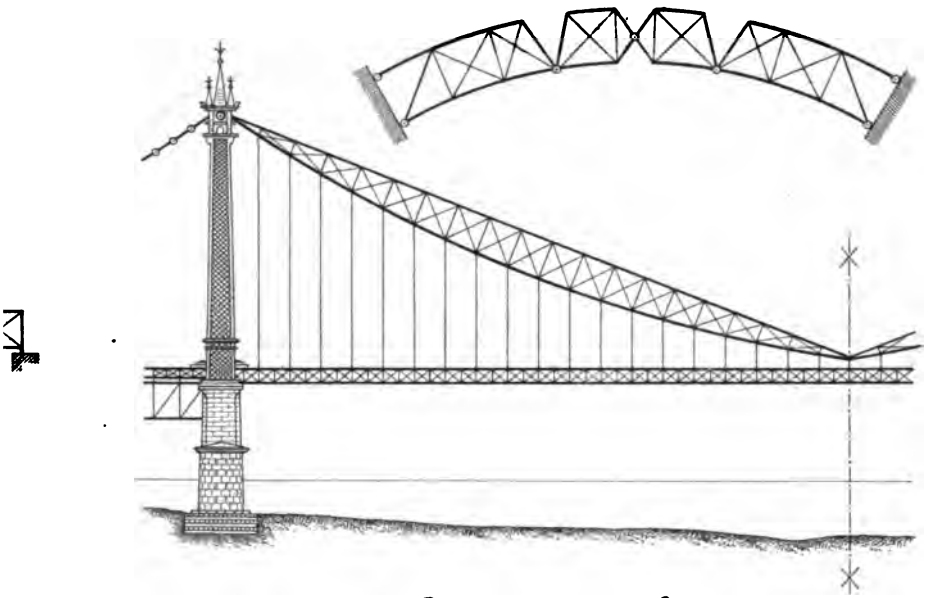
UNIV. OF MICHIGAN
1914

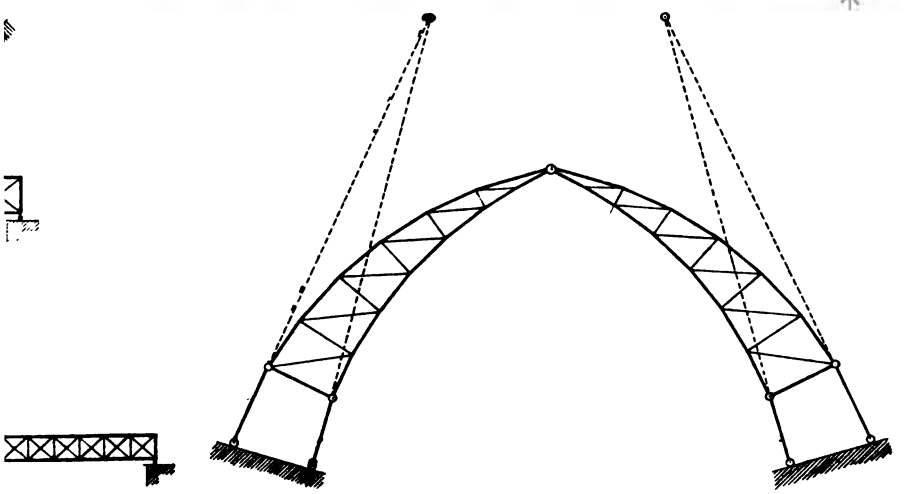
Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.



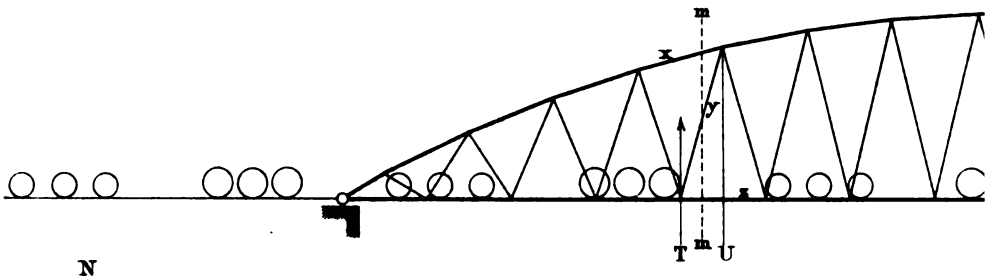
Verlag v Arthur Felix in Leipzig

Tafel 1.





Lith. Anst. v Steinmetz & Bornemann, Meißen.



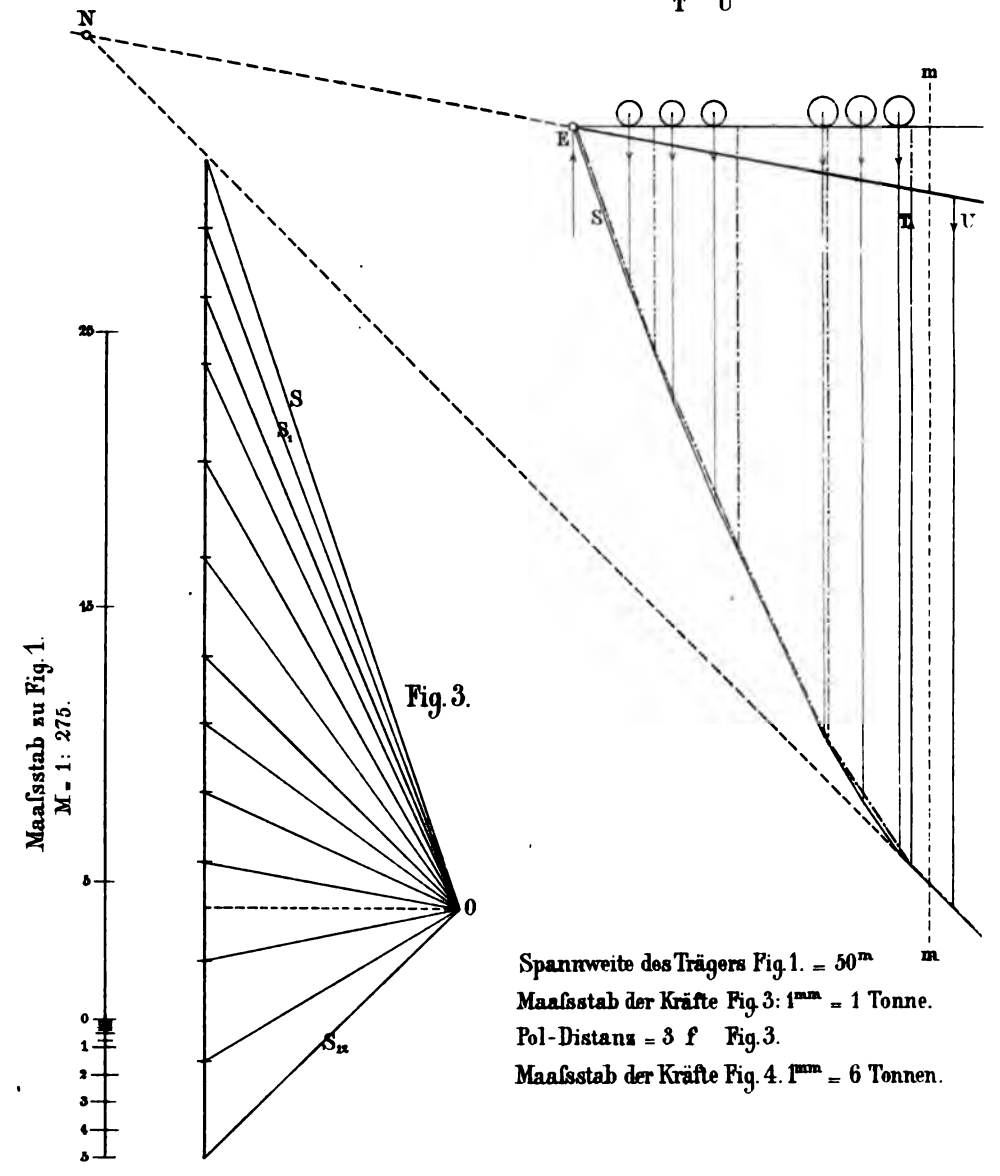


Fig. 3.

Spannweite des Trägers Fig. 1. = 50m

Maafsstab der Kräfte Fig. 3: 1mm = 1 Tonne.

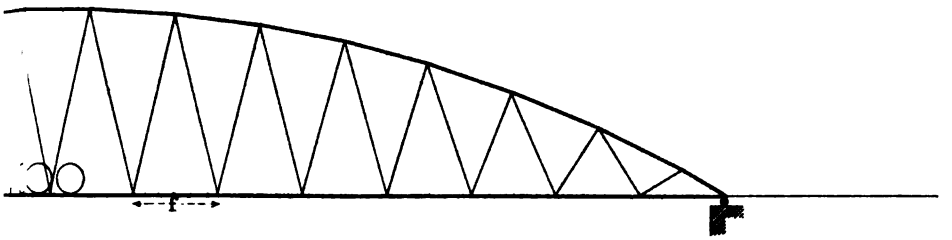
Pol-Distanz = 3 f Fig. 3.

Maafsstab der Kräfte Fig. 4. 1mm = 6 Tonnen.

Verlag v Arthur Felix in Leipzig.

ig. 1.

Tafel 2.



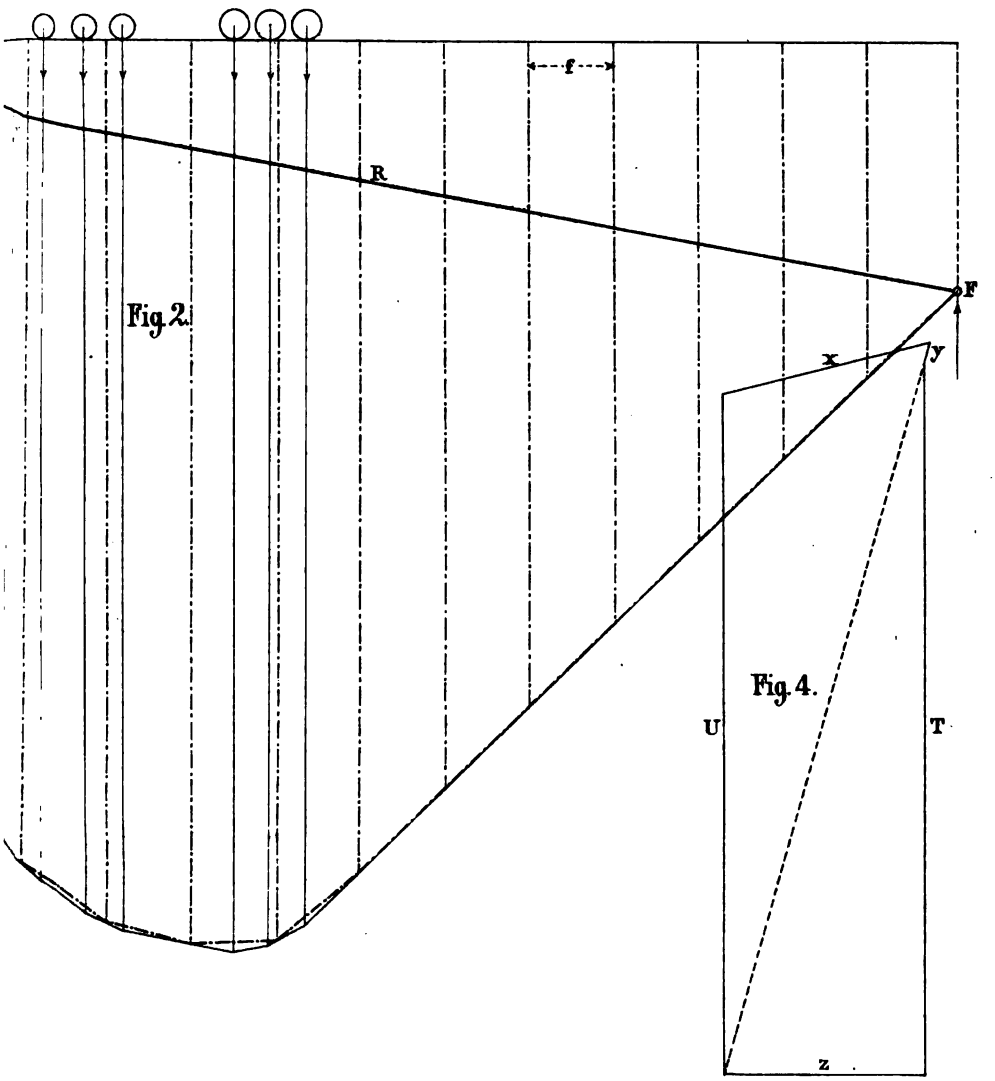


Fig. 2.

Fig. 4.

Lith. Anst. v. Steinmetz & Bornemann, Meifsen.

Fig.1.

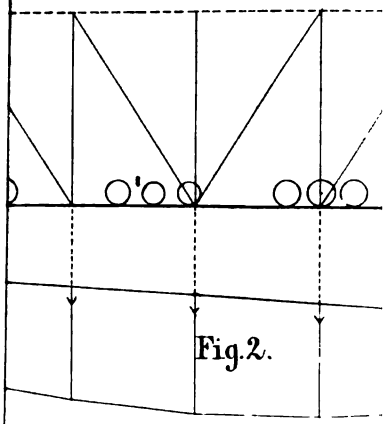


Fig.2.

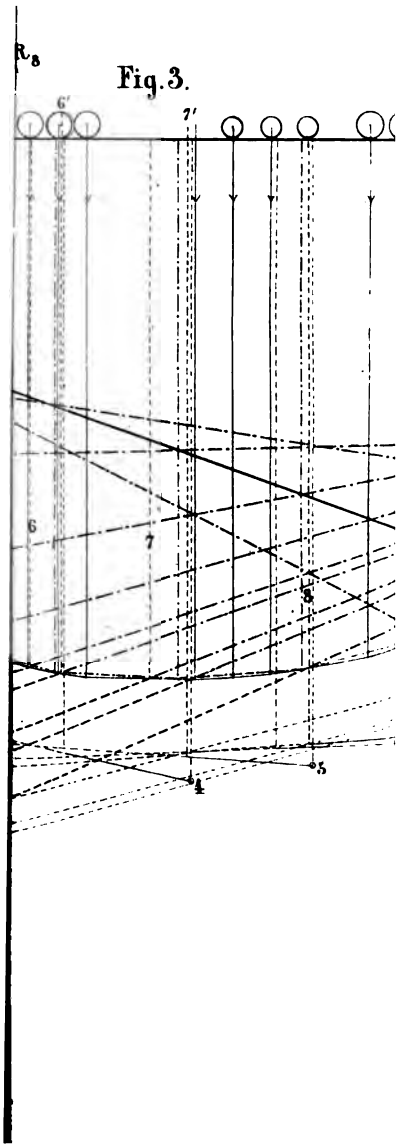
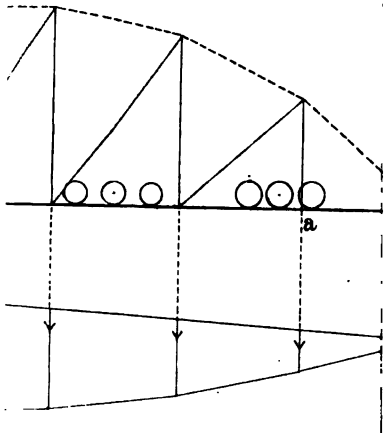
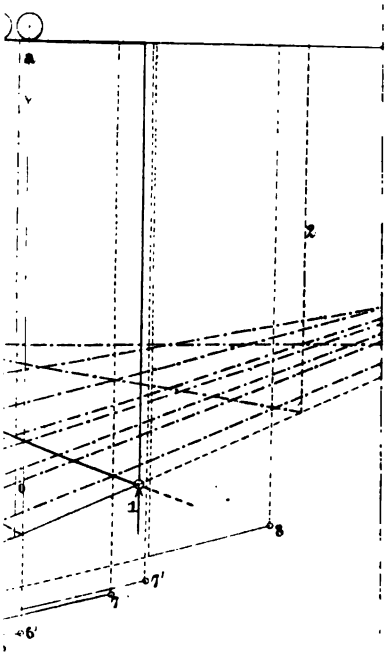


Fig.3.


a


a
2
1
8
7'
7
6'

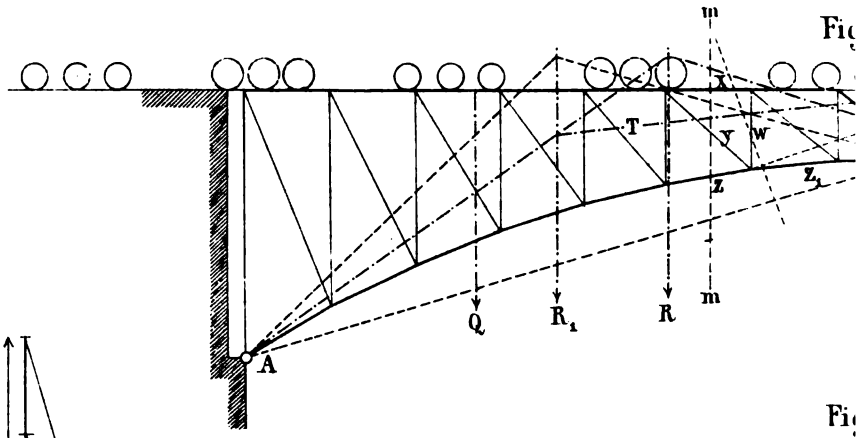
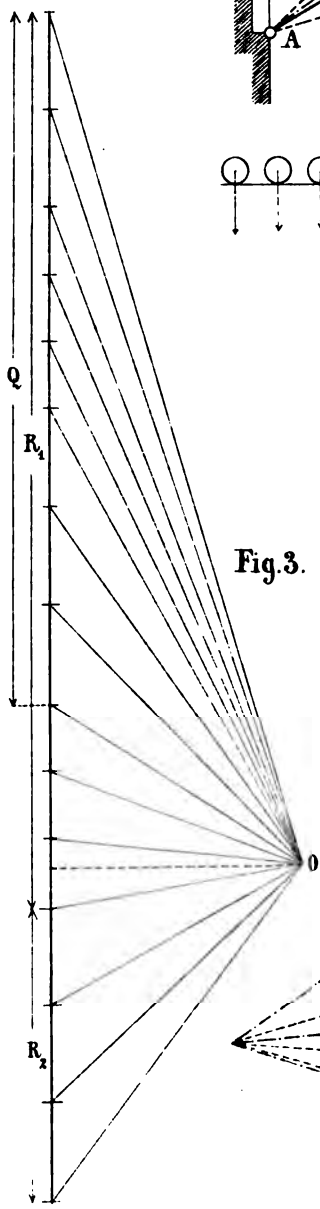
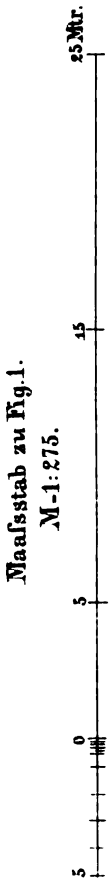


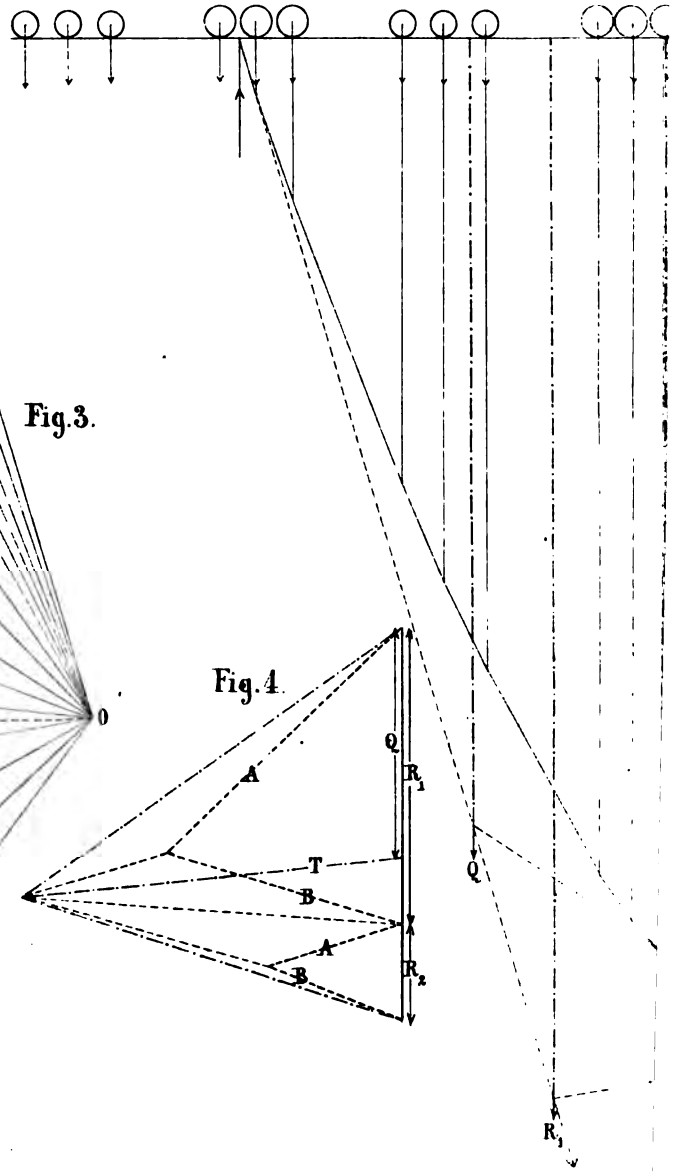
Fig.3.





Maafsstab zu Fig.1.
M-1:275.

Fig.4.



Verlag von Arthur Felix in Leipzig.